



# Groupes d'extensions et foncteurs polynomiaux

Aurélien Djament

## ► To cite this version:

Aurélien Djament. Groupes d'extensions et foncteurs polynomiaux. Journal of the London Mathematical Society, 2015, 92 (1), pp.63-88. 10.1112/jlms/jdv017 . hal-01023705v3

**HAL Id: hal-01023705**

**<https://hal.science/hal-01023705v3>**

Submitted on 2 Apr 2015

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Groupes d'extensions et foncteurs polynomiaux<sup>\*</sup>

Aurélien DJAMENT<sup>†</sup>

2 avril 2015

*Dédié à Teimuraz Pirashvili à l'occasion de son soixantième anniversaire*

## Résumé

Généralisant un travail de Pirashvili, nous caractérisons les petites catégories additives  $\mathcal{A}$  telles que l'inclusion dans la catégorie des foncteurs de  $\mathcal{A}$  vers les groupes abéliens de la sous-catégorie pleine des foncteurs analytiques induise un isomorphisme entre groupes d'extensions.

## Abstract

Extending Pirashvili's work, we characterize small additive categories  $\mathcal{A}$  such that the inclusion in the category of functors from  $\mathcal{A}$  to abelian groups of the full subcategory of analytic functors induces an isomorphism between extension groups.

## Introduction

Dans toute catégorie de foncteurs d'une catégorie additive vers une catégorie de modules<sup>1</sup>, on dispose d'une notion fondamentale d'effets croisés qui permet de définir les *foncteurs polynomiaux*; les *foncteurs analytiques* sont les colimites de foncteurs polynomiaux (qu'on peut supposer filtrantes). Ces notions ont été introduites par Eilenberg et Mac Lane (cf. [5]) au début des années 1950; de fait, les groupes d'homologie singulière des espaces qui portent leur nom définissent des endofoncteurs polynomiaux  $H_i(K(-, n); \mathbb{Z})$  des groupes abéliens, dont on peut estimer le degré en fonction des entiers  $i$  et  $n$ . Depuis, l'importance de la notion de foncteur polynomial s'est confirmée en topologie algébrique (voir par exemple [10] pour la mise en évidence d'un lien fort avec les modules sur l'algèbre de Steenrod), mais aussi en théorie des représentations (voir par exemple le survol [14]) ou en  $K$ -théorie algébrique et homologie des groupes (voir par exemple l'appendice de [6], ou [2]).

L'un des succès de la théorie provient de ce que de nombreux calculs de groupes d'extensions entre foncteurs polynomiaux sont accessibles dans la catégorie de foncteurs considérée (cf. [6]), qui est une catégorie abélienne très régulière, avec assez d'objets projectifs et injectifs. La quasi-totalité des calculs sont

---

<sup>\*</sup>Classification MSC 2010 : 18A25, 18G15 (primaire), 18A40, 18E05, 18E15, 18G10 (secondaire).

<sup>†</sup>CNRS, Laboratoire de mathématiques Jean Leray (UMR 6629), 2 rue de la Houssinière, BP 92208, 44322 NANTES CEDEX 3, FRANCE ; aurelien.djament@univ-nantes.fr.

1. Ces notions peuvent être définies dans un cadre plus général (tant pour la source que pour le but), mais les résultats et méthodes qu'on présente dans cet article sont spécifiques au cas d'une source additive et d'un but abélien.

menés dans la catégorie de *tous* les foncteurs (d’une catégorie additive raisonnable vers une catégorie de modules), même quand on ne traite que de foncteurs polynomiaux ou analytiques. Pourtant, les sous-catégories (pleines) de foncteurs polynomiaux de degré au plus  $d$ , où  $d$  est un entier fixé, et la sous-catégorie des foncteurs analytiques sont également des catégories abéliennes fondamentales (dont on comprend plus aisément la structure globale que celle de la catégorie de tous les foncteurs) avec assez d’objets injectifs (et de projectifs dans le premier cas). La question de la comparaison des groupes d’extensions entre ces catégories, très naturelle, n’a été que peu étudiée. Le fait que, lorsque la catégorie but est celle des espaces vectoriels sur un corps de caractéristique nulle, tous ces groupes d’extensions coïncident est assez élémentaire et bien connu des experts, mais ne semble pas avoir été publié. Lorsqu’on travaille avec des espaces vectoriels sur un corps de caractéristique première, ou avec les groupes abéliens, au but, il n’en est plus de même : les extensions, dès le degré 2, entre deux foncteurs polynomiaux de degré  $d$  font apparaître généralement des foncteurs de degré strictement supérieur à  $d$ . C’est essentiellement l’existence du morphisme de Frobenius qui permet un tel phénomène (cf. l’exemple classique 1.4 ci-après). Mais, *dans les cas usuels*, les groupes d’extensions entre deux foncteurs analytiques sont les mêmes dans la catégorie de tous les foncteurs et dans la catégorie des foncteurs analytiques, et les groupes d’extensions entre deux foncteurs polynomiaux coïncident dans la catégorie de tous les foncteurs et dans la catégorie des foncteurs polynomiaux de degré au plus  $d$ , pourvu que  $d$  soit assez grand par rapport au degré des foncteurs considérés et au degré cohomologique. Dans les catégories de foncteurs entre espaces vectoriels (de dimension finie à la source) sur un corps fini, le premier phénomène est bien connu, et facile à montrer (il provient de ce que toute fonction entre deux espaces vectoriels *finis* est polynomiale). Le deuxième phénomène a été observé dans le cas particulier où les groupes abéliens de morphismes de la catégorie source sont sans torsion et où l’un des arguments des groupes d’extensions est additif, par Pirashvili, dans [18], qui donne également des bornes de stabilité explicites (et essentiellement optimales). Mais les autres cas semblaient largement ouverts. Signalons toutefois, encore dans le cas des foncteurs entre espaces vectoriels sur un corps fini, le calcul par Smith (non publié, mais mentionné et utilisé dans [8]) des auto-extensions du foncteur identité dans les catégories des foncteurs polynomiaux de degré donné.

Dans le présent article, nous résolvons de façon générale le problème. Précisément, nous montrons que les groupes d’extensions entre foncteurs analytiques dans la catégorie de tous les foncteurs (d’une petite catégorie additive vers, disons, les groupes abéliens) et dans la catégorie des foncteurs analytiques coïncident si et seulement si, pour tout nombre premier  $p$ , la torsion  $p$ -primaire des groupes abéliens de morphismes à la source est bornée, avec une condition d’uniformité partielle (voir le théorème 1.14 pour l’énoncé précis). Nous donnons également des résultats de comparaison de groupes d’extensions entre catégories de foncteurs polynomiaux de degré donné et catégorie de tous les foncteurs.

*Remerciements* L’auteur remercie chaleureusement le rapporteur anonyme qui a permis de notables améliorations du texte d’origine, en particulier pour les arguments de changement de base au but, lacunaires dans la première version de cet article. Il est reconnaissant envers Christine Vespa pour ses remarques sur une version préliminaire de ce texte. Il remercie également Antoine Touzé et

Vincent Franjou pour des discussions utiles autour de la construction cubique de Mac Lane.

## 1 Énoncé des résultats

Si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont deux catégories, avec  $\mathcal{A}$  (essentiellement) petite, on note  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  la catégorie des foncteurs de  $\mathcal{A}$  vers  $\mathcal{B}$ . Si  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  sont des catégories additives, on note  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  constituée des foncteurs additifs. Si  $k$  est un anneau, on note  $k - \mathbf{Mod}$  la catégorie des  $k$ -modules à gauche ; on pose  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k) := \mathbf{Fct}(\mathcal{A}, k - \mathbf{Mod})$ .

On rappelle que, si  $\mathcal{E}$  est une catégorie abélienne, alors  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  est une catégorie abélienne pour toute catégorie  $\mathcal{A}$  essentiellement petite ; si  $\mathcal{E}$  possède assez d’injectifs ou de projectifs, ou est une catégorie de Grothendieck (on se placera généralement dans cette situation), il en est de même pour  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ . On peut en particulier y faire de l’algèbre homologique.

Supposons que  $\mathcal{A}$  est une catégorie additive (essentiellement petite) et  $\mathcal{E}$  une catégorie abélienne. Pour tout entier  $d$ , on note  $\mathbf{Fct}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  des foncteurs polynomiaux de degré au plus  $d$ . Cette notion remonte à Eilenberg-Mac Lane ([5]) dans le cas où source et but sont des catégories de modules ; les effets croisés et les foncteurs polynomiaux se définissent exactement de la même façon d’une catégorie additive vers une catégorie abélienne (voir par exemple [18] pour le cas où le but est une catégorie de modules, ou [9], où le cadre est encore plus général). Cette sous-catégorie est épaisse et stable par limites et colimites. On note  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k) := \mathbf{Fct}_d(\mathcal{A}, k - \mathbf{Mod})$ . On note  $i_d : \mathbf{Fct}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  le foncteur d’inclusion ; lorsque  $\mathcal{E}$  est une catégorie de Grothendieck, ce foncteur possède un adjoint à droite qu’on note  $p_d$  et un adjoint à gauche qu’on note  $q_d$  (les mentions aux catégories source et but sont omises de ces notations). On considérera aussi beaucoup la catégorie des foncteurs analytiques  $\mathbf{Fct}_\infty(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ , c’est-à-dire la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  obtenue en saturant par colimites la réunion des  $\mathbf{Fct}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  (c’est une sous-catégorie épaisse de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  — cette propriété classique mais pas complètement formelle sera démontrée plus tard). On introduit des notations évidentes  $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; k)$ ,  $i_\infty$  et  $p_\infty$  (en général, il n’y a plus de  $q_\infty$  car  $\mathbf{Fct}_\infty(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  n’est pas une sous-catégorie stable par limites dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ ).

Le but de cet article est de comparer les groupes d’extensions entre les catégories  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  et  $\mathbf{Fct}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  (où  $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ), lorsque  $\mathcal{E}$  est une catégorie de Grothendieck. (Dans le cas où  $\mathcal{E}$  est une catégorie de modules sur un anneau commutatif, on pourrait tout aussi bien donner des résultats en termes de groupes de torsion.)

**Hypothèse 1.1.** *Dans toute la suite,  $\mathcal{A}$  désigne une catégorie additive (essentiellement) petite.*

Commençons par rappeler deux résultats classiques dans cette direction. Le premier d’entre eux est connu depuis longtemps des spécialistes des foncteurs polynomiaux, mais l’auteur du présent travail n’en connaît pas de référence écrite. Nous en rappellerons donc une démonstration ultérieurement.

**Théorème 1.2.** (Folklore) *Supposons que  $k$  est un corps de caractéristique nulle. Pour tous  $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  et tous foncteurs  $F, G$  dans  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ , le mor-*

phisme naturel

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)}^*(F, G) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}^*(i_d(F), i_d(G))$$

qu'induit le foncteur exact  $i_d$  est un isomorphisme.

(Dans la suite, pour alléger, nous omettrons souvent la notation des foncteurs d'inclusion  $i_d$ .)

**Remarque 1.3.** *Il existe d'autres situations où la comparaison des groupes d'extensions entre catégorie de tous les foncteurs et sous-catégories de foncteurs polynomiaux de degré donné fonctionne de manière aussi favorable, par exemple les  $\Gamma$ -modules. On n'a même pas besoin, dans ce contexte, de faire une hypothèse de caractéristique nulle ou apparentée : l'équivalence de catégories de Pirashvili ([20]) à la Dold-Kan entre  $\Gamma$ -modules et  $\Omega$ -modules (où le degré polynomial se lit de façon transparente, par l'annulation des valeurs du foncteurs sur les ensembles de cardinal strictement supérieur au degré) implique aussitôt le résultat.*

*Ce résultat d'isomorphisme entre groupes d'extensions, sans restriction de degré, entre catégorie de tous les foncteurs et sous-catégorie de foncteurs polynomiaux de degré fixé vaut également pour les foncteurs des groupes libres de rang fini vers les groupes abéliens. La démonstration, donnée dans l'article [3] avec Pirashvili et Vespa, repose sur l'examen de la filtration de l'algèbre d'un groupe libre par les puissances de son idéal d'augmentation et des méthodes d'homologie des foncteurs voisines de certaines de celles développées dans [18] ou dans le présent travail (mais il n'est pas nécessaire de recourir à des techniques liées à la construction cubique de Mac Lane, de sorte qu'on peut obtenir le résultat plus rapidement).*

Dès que l'on est en caractéristique positive, le théorème précédent tombe grossièrement en défaut, comme l'illustre l'exemple très classique suivant.

**Exemple 1.4.** *Soient  $p$  un nombre premier et  $\mathcal{F}(p)$  la catégorie des foncteurs des  $\mathbb{F}_p$ -espaces vectoriels de dimension finie vers les  $\mathbb{F}_p$ -espaces vectoriels, on note  $I$  le foncteur d'inclusion, qui est polynomial de degré 1. Il est classique (cf. [7]) que  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(p)}^2(I, I)$  est isomorphe à  $\mathbb{F}_p$ , un générateur en étant donné par la classe de la suite exacte*

$$0 \rightarrow I \rightarrow S^p \rightarrow \Gamma^p \rightarrow I \rightarrow 0$$

*dont la première flèche est le morphisme de Frobenius ( $S^p$  désigne la  $p$ -ème puissance symétrique et  $\Gamma^p$  la  $p$ -ème puissance divisée), la deuxième la norme et la troisième le morphisme de Verschiebung (dual du Frobenius).*

*Par ailleurs, pour  $d < p$ , il est classique que la sous-catégorie  $\mathcal{F}_d(p)$  des foncteurs polynomiaux de degré (au plus)  $d$  de  $\mathcal{F}(p)$  est semi-simple (parce que les représentations des groupes symétriques  $\Sigma_n$  à coefficients dans  $\mathbb{F}_p$  sont semi-simples pour  $n < p$ ; si l'on se restreint à  $d = 1$  l'assertion est de toute façon triviale), de sorte que  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_d(p)}^2(I, I) = 0$  n'est alors pas isomorphe à  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(p)}^2(I, I)$ . En revanche, pour  $d \geq p$ , le morphisme canonique  $\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_d(p)}^2(I, I) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(p)}^2(I, I)$  est un isomorphisme. En effet, c'est toujours un monomorphisme parce que  $\mathcal{F}_d(p)$  est une sous-catégorie épaisse de  $\mathcal{F}(p)$ , et il est clair avec ce qui précède que c'est un épimorphisme pour  $d \geq p$ , puisque  $S^p$  et  $\Gamma^p$  sont de degré  $p$ .*

En général, on ne peut donc pas s'attendre à mieux qu'à ce que le morphisme naturel

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A};k)}^*(F, G) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A};k)}^*(i_d(F), i_d(G))$$

soit un isomorphisme en degré cohomologique  $*$  suffisamment petit par rapport à  $d$ , avec une borne dépendant de conditions sur la torsion des groupes abéliens de morphismes dans la catégorie additive  $\mathcal{A}$ . (Pour  $d = \infty$ , on s'attend donc à un isomorphisme en tout degré cohomologique... mais nous verrons que ce n'est vrai que lorsque  $\mathcal{A}$  est « assez gentille ».)

Le second théorème, beaucoup plus difficile, est dû à Pirashvili (voir [18]). Nos résultats permettront de le généraliser.

**Théorème 1.5.** (Pirashvili) *Soient  $d, i \in \mathbb{N}$ ,  $F$  et  $G$  deux objets de  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$ . Supposons que :*

1. *les groupes abéliens  $\mathcal{A}(a, b)$  sont tous sans torsion ;*
2.  *$F$  ou  $G$  est additif ;*
3.  *$i \leq 2d$ .*

*Alors le morphisme canonique*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; \mathbb{Z})}^i(F, G) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})}^i(F, G)$$

*est un isomorphisme.*

(Il n'est pas difficile de reprendre les arguments de Pirashvili pour inclure aussi le cas  $d = \infty$  dans l'énoncé.)

La démonstration de ce théorème donnée dans [18] repose sur un examen minutieux de la construction cubique de Mac Lane et de la filtration polynomiale (i.e. par les puissances de l'idéal d'augmentation) de l'anneau de groupe  $\mathbb{Z}[V]$ , où  $V$  est un groupe abélien sans torsion (un ingrédient fondamental est un argument d'idéal *quasi-régulier* — notion introduite par Quillen dans ses travaux sur l'homologie des algèbres — qui repose fortement sur l'absence de torsion).

**Remarque 1.6.** *Pirashvili donne également un énoncé analogue pour les groupes de torsion (qui se démontre exactement de la même façon). On laissera au lecteur le soin d'écrire les traductions en termes de Tor des résultats du présent article.*

Donnons maintenant nos résultats. On commence par se concentrer sur le cas où la catégorie but est la catégorie des espaces vectoriels sur le corps  $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p$ , où  $p$  est un nombre premier fixé.

**Théorème 1.7.** *Supposons qu'il existe un entier naturel  $r$  tel que, pour tous objets  $a$  et  $b$  de  $\mathcal{A}$ , la torsion  $p$ -primaire du groupe abélien  $\mathcal{A}(a, b)$  soit bornée par  $p^r$ .*

*Soient  $d, n, i \in \mathbb{N}$  tels que  $d \leq n$ ,  $F$  un foncteur de  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$ ,  $G$  un foncteur de  $\mathcal{F}_n(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$ . Alors le morphisme canonique*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_n(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^i(F, G) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^i(F, G)$$

*est un isomorphisme pour  $i \leq \left\lfloor \frac{n-d+1}{p^r} \right\rfloor$  et un monomorphisme pour  $i = \left\lfloor \frac{n-d+1}{p^r} \right\rfloor + 1$ .*

*Le même résultat vaut si l'on échange  $F$  et  $G$  dans les groupes d'extensions.*

(Dans cet énoncé, les crochets désignent la partie entière.)

**Théorème 1.8.** *Les assertions suivantes sont équivalentes.*

1. *Pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{A}$ , il existe  $r \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout objet  $b$  de  $\mathcal{A}$ , la torsion  $p$ -primaire du groupe abélien  $\mathcal{A}(a, b)$  soit bornée par  $p^r$  ;*
2. *pour tous objets  $F$  et  $G$  de  $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$ , le morphisme canonique*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^*(F, G) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^*(F, G)$$

*est un isomorphisme ;*

3. *pour tous objets  $F$  et  $G$  de  $\mathcal{F}_1(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$ , le morphisme canonique*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^2(F, G) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^2(F, G)$$

*est un isomorphisme.*

Comme signalé dans l'introduction, lorsque  $\mathcal{A}$  est la catégorie des espaces vectoriels sur un corps fini, ce théorème (beaucoup plus simple à montrer que dans le cas général) était déjà connu : c'est une conséquence facile d'un résultat de finitude des résolutions projectives des foncteurs polynomiaux dû à L. Schwartz (voir par exemple [7], § 10) et de l'analyticité des cogénérateurs injectifs standard dans ce cadre (voir par exemple l'appendice de [7]) ; le résultat apparaît explicitement dans l'article de N. Kuhn [13] (proposition 4.2).

**Remarque 1.9.** *Le résultat de finitude des résolutions projectives susmentionné conduit très naturellement à la question plus générale de savoir si tous les foncteurs de type fini possèdent une résolution projective de type fini. Cet énoncé, qui équivaut au caractère localement noethérien de la catégorie de foncteurs considérée, a été conjecturé, pour les foncteurs entre espaces vectoriels sur un corps fini (il est grossièrement faux pour les espaces vectoriels sur un corps infini, par exemple), par Lannes et Schwartz à la fin des années 1980. Cette conjecture (ainsi que des énoncés plus forts) a tout récemment été démontrée par Putman et Sam dans [21] et Sam et Snowden dans [23]. Les méthodes utilisées par ces auteurs, de nature combinatoire (elles s'inspirent des bases de Gröbner), semblent indépendantes des questions homologiques.*

*Dans le présent article, nous n'aurons pas besoin de résultats de finitude.*

**Proposition 1.10.** *Soient  $d \in \mathbb{N}$ ,  $F$  et  $G$  des foncteurs de  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$ . Le morphisme canonique*

$$\mathrm{colim}_{r \geq d} \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_r(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^*(F, G) \rightarrow \mathrm{colim}_{p^t > d} \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}/p^t; \mathbb{F}_p)}^*(F, G)$$

*est un isomorphisme.*

Cet énoncé mérite quelques précisions : pour  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{A}/n$  la catégorie additive ayant les mêmes objets que  $\mathcal{A}$  et dont les morphismes sont donnés par  $(\mathcal{A}/n)(a, b) = \mathcal{A}(a, b)/n$ , la composition étant induite par celle de  $\mathcal{A}$ , de sorte qu'on dispose d'un foncteur canonique additif, plein et essentiellement surjectif  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/n$ . On a donc un diagramme commutatif de foncteurs d'inclusion

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_d(\mathcal{A}/p^t; \mathbb{F}_p) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{A}/p^t; \mathbb{F}_p) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p) \end{array}$$

dans lequel on voit sans trop de peine (nous donnerons les détails de l'argument dans la section 2) que la flèche verticale de gauche est une égalité si  $p^t > d$ , ce qui procure un foncteur (exact et pleinement fidèle)  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{A}/p^t; \mathbb{F}_p)$  sous cette condition. Le morphisme canonique de la proposition est induit par ces foncteurs.

Notre dernier résultat sur  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$  constitue le cœur de la démonstration de l'implication  $3 \Rightarrow 1$ . du théorème 1.8.

**Proposition 1.11.** *Soient  $A$  un foncteur additif de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$  et  $T : \mathcal{A}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$  un foncteur additif projectif de la forme  $\bigoplus_i \mathcal{A}(-, a_i)$ , où  $(a_i)$  est une collection d'objets de  $\mathcal{A}$ . On note  $B := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{F}_p)$ , c'est donc un foncteur additif de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$ .*

*On dispose d'un diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc}
\text{colim}_{d \in \mathbb{N}^*} \text{Ext}_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^2(A, B) & \xrightarrow{\simeq} & \text{colim}_{i \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}(A, \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(-, \mathbb{Z}/p) \circ (T/p^i)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Ext}_{\mathcal{F}_{\infty}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^2(A, B) & \xrightarrow{\simeq} & \text{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}(A, \text{colim}_{i \in \mathbb{N}} \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(-, \mathbb{Z}/p) \circ (T/p^i)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^2(A, B) & \xrightarrow{\simeq} & \text{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}(A, \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(-, \mathbb{Z}/p) \circ T)
\end{array}$$

dont les flèches verticales de gauche sont induites par les foncteurs d'inclusion et les flèches verticales de droite sont les morphismes canoniques.

On termine en donnant deux résultats de comparaison dans lesquels la catégorie but des foncteurs est une catégorie de Grothendieck quelconque. Comme on le verra dans la section 2, ils se déduisent des précédents par un argument de changement de base (on pourrait bien sûr en donner quelques autres conséquences).

**Hypothèse 1.12.** *Dans la suite,  $\mathcal{E}$  désigne une catégorie de Grothendieck.*

**Théorème 1.13.** *Supposons qu'il existe un entier  $N > 0$  tel que, pour tous objets  $a$  et  $b$  de  $\mathcal{A}$ , le sous-groupe de torsion du groupe abélien  $\mathcal{A}(a, b)$  soit annulé par  $N$ .*

*Soient  $d, n, i \in \mathbb{N}$  tels que  $d \leq n$ ,  $F$  un foncteur de  $\mathbf{Fct}_d(\mathcal{A}; \mathcal{E})$ ,  $G$  un foncteur de  $\mathbf{Fct}_n(\mathcal{A}; \mathcal{E})$ . Alors le morphisme canonique*

$$\text{Ext}_{\mathbf{Fct}_n(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^i(F, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^i(F, G)$$

*est un isomorphisme pour  $i \leq \lceil \frac{n-d+1}{N} \rceil$  et un monomorphisme pour  $i = \lceil \frac{n-d+1}{N} \rceil + 1$ .*

*Le même résultat vaut si l'on échange  $F$  et  $G$  dans les groupes d'extensions.*

**Théorème 1.14.** *Supposons que la condition suivante soit satisfaite :*

*pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{A}$  et tout nombre premier  $p$ , il existe  $r \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout objet  $b$  de  $\mathcal{A}$ , la torsion  $p$ -primaire du groupe abélien  $\mathcal{A}(a, b)$  soit bornée par  $p^r$ .*



Alors, pour tout foncteur analytique  $F$  et tout foncteur polynomial  $G$  dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathcal{E})$ , le morphisme canonique

$$\mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}_{\infty}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^*(F, G) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^*(F, G)$$

est un isomorphisme.

La réciproque est vraie si  $\mathcal{E}$  est la catégorie des groupes abéliens; dans ce cas, si la condition précédente n'est pas réalisée, on peut trouver un foncteur analytique  $F$  et un foncteur additif  $G$  tels que le morphisme précédent ne soit pas un isomorphisme en degré cohomologique au plus 2.

En fait, on peut légèrement renforcer la conclusion du théorème : supposer que  $G$  est analytique suffit à assurer la même conclusion. Cela peut s'établir avec les mêmes outils que ceux utilisés dans le présent travail, mais avec plus de développements techniques.

## 2 Outils et premières réductions

### 2.1 Adjonctions et suites spectrales de Grothendieck

Pour tout entier naturel  $d$ , le foncteur  $i_d : \mathbf{Fct}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  possède un adjoint à droite  $p_d$  et un adjoint à gauche  $q_d$  car  $i_d$  commute aux limites et colimites (les catégories sont de Grothendieck). Explicitement,  $p_d(F)$  (resp.  $q_d(F)$ ) est le plus grand sous-foncteur (resp. quotient) de  $F$  polynomial de degré au plus  $d$ ; on peut l'écrire aussi comme noyau (resp. conoyau) d'un morphisme naturel utilisant une variante des effets croisés. On note aussi que la précomposition par un foncteur additif ou la postcomposition par un foncteur exact commutent aux foncteurs  $i_d$ ,  $p_d$  et  $q_d$ .

Si  $\mathcal{E}$  est la catégorie des modules sur un anneau commutatif  $k$ , on dispose également des utiles formules suivantes pour les dérivés de ces foncteurs :

$$\mathbf{R}^\bullet p_d(F)(a) = \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)}^\bullet(q_d(k[\mathcal{A}(a, -)]), F) \quad (1)$$

$$\mathbf{L}_\bullet q_d(F)(a) = \mathrm{Tor}_\bullet^{\mathcal{A}}(q_d(k[\mathcal{A}(-, a)]), F). \quad (2)$$

On peut en fait utiliser ces mêmes formules lorsque  $\mathcal{E}$  est une catégorie de Grothendieck quelconque, en remarquant qu'on dispose de bifoncteurs

$$\mathrm{Hom} : \mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})^{op} \times \mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E}$$

et

$$\otimes_{\mathcal{A}} : \mathcal{F}(\mathcal{A}^{op}; \mathbb{Z}) \times \mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{E},$$

qu'on peut définir formellement comme une fin et une cofin respectivement, et qui sont caractérisés à isomorphisme naturel près par les deux propriétés suivantes :

- le bifoncteur  $\mathrm{Hom}$  (resp.  $\otimes_{\mathcal{A}}$ ) commute aux limites (resp. colimites) par rapport à chaque variable;
- pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{A}$ , les foncteurs  $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}[\mathcal{A}(a, -)], -)$  et  $\mathbb{Z}[\mathcal{A}(-, a)] \otimes_{\mathcal{A}}$  sont naturellement isomorphes à l'évaluation en  $a$ .

On peut dériver ces bifoncteurs de la même façon que les Hom et produits tensoriels usuels, obtenant :

$$\mathbf{R}^\bullet p_d(F)(a) = \text{Ext}^\bullet(q_d(\mathbb{Z}[\mathcal{A}(a, -)]), F) \quad (3)$$

et

$$\mathbf{L}_\bullet q_d(F)(a) = \text{Tor}_\bullet^{\mathcal{A}}(q_d(\mathbb{Z}[\mathcal{A}(-, a)]), F) \quad (4)$$

pour  $F$  dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ .

(Toutes ces formules ne sont que des variations du lemme de Yoneda.)

Le foncteur  $i_\infty : \mathbf{Fct}_\infty(\mathcal{A}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  commute également aux colimites (mais pas aux limites) et possède donc un adjoint à droite  $p_\infty$ . Il s'obtient en prenant la colimite sur  $d \in \mathbb{N}$  des  $p_d$  (plus précisément,  $i_\infty p_\infty \simeq \text{colim}_{d \in \mathbb{N}} i_d p_d$ ) ; il en est de même pour ses dérivés à droite.

Comme  $i_d$  est un foncteur exact, on dispose de suites spectrales de Grothendieck

$$E_2^{i,j} = \text{Ext}_{\mathbf{Fct}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^i(G, \mathbf{R}^j p_d(F)) \Rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^{i+j}(i_d(G), F) \quad (5)$$

(pour  $d \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ ) et

$$E_{i,j}^2 = \text{Ext}_{\mathbf{Fct}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^i(\mathbf{L}_j q_d(F), G) \Rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^{i+j}(F, i_d(G)) \quad (6)$$

(pour  $d \in \mathbb{N}$ ).

Pour démontrer nos résultats, nous chercherons donc des zones d'annulation pour  $\mathbf{R}^j p_d(F)$  ou  $\mathbf{L}_j q_d(F)$  lorsque  $j$  est non nul et assez petit par rapport à  $d$ .

## 2.2 Changement de catégorie but

Nous montrons ici comment déduire le théorème 1.13 des théorèmes 1.7 et 1.2, ainsi que le théorème 1.14 du théorème 1.8.

On commence par montrer le résultat suivant : si

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; k)}^*(F, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)}^*(F, G)$$

est un isomorphisme pour tous foncteurs analytiques  $F$  et  $G$  et tout corps premier fini  $k$ , alors le noyau et le conoyau du morphisme canonique

$$\text{Ext}_{\mathbf{Fct}_\infty(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^*(F, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^*(F, G)$$

sont des  $\mathbb{Q}$ -espaces vectoriels pour tous foncteurs  $F$  et  $G$  de  $\mathbf{Fct}_\infty(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ , où  $\mathcal{E}$  est une catégorie de Grothendieck. On procède en deux étapes.

**Cas d'une catégorie but  $k$ -linéaire** Si  $k$  est un corps premier, disons qu'un objet  $E$  de  $\mathcal{E}$  est  $k$ -linéaire si l'anneau  $\text{End}_{\mathcal{E}}(E)$  est une  $k$ -algèbre. Notons  $\mathcal{E}_k$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{E}$  des objets  $k$ -linéaires. On note que  $\mathcal{E}_k$  est une sous-catégorie abélienne de  $\mathcal{E}$  (qui est également une catégorie de Grothendieck) ; l'inclusion  $u : \mathcal{E}_k \rightarrow \mathcal{E}$  est un foncteur exact et pleinement fidèle qui commute à toutes les limites et colimites. On dit que  $\mathcal{E}$  est  $k$ -linéaire si  $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}$  (noter que tous les groupes abéliens  $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(A, B)$  sont alors des  $k$ -espaces vectoriels).

Supposons d'abord que  $\mathcal{E}$  est  $k$ -linéaire (où  $k$  est un corps premier fixé), et montrons notre résultat dans ce cas, c'est-à-dire que le morphisme canonique

$$\text{Ext}_{\mathbf{Fct}_\infty(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^*(F, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^*(F, G) \quad (7)$$

est un isomorphisme pour tous foncteurs analytiques  $F$  et  $G$  (sous l'hypothèse que c'est vrai pour  $\mathcal{E} = k - \mathbf{Mod}$ ). On le fait d'abord lorsque  $F$  est de la forme  $X \otimes T$ , où  $X$  est un foncteur analytique de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$  et  $T$  un objet de  $\mathcal{E}$ . Ici,  $X \otimes T$  est à comprendre comme la composée de  $X$  et du foncteur  $- \otimes T : k - \mathbf{Mod} \rightarrow \mathcal{E}$ . Du fait que le produit tensoriel sur un corps est exact en chaque variable, l'isomorphisme naturel d'adjonction

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}(X \otimes T, G) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)}(X, \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(T, -) \circ G)$$

se dérive en une suite spectrale

$$E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)}^i(X, \mathrm{Ext}_{\mathcal{E}}^j(T, -) \circ G) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^{i+j}(X \otimes T, G).$$

Le même résultat vaut en remplaçant  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$  et  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  par leurs sous-catégories de foncteurs analytiques, de sorte que le morphisme (7) est bien un isomorphisme pour  $F = X \otimes T$  avec  $X$  analytique. Le cas général s'en déduit parce que la sous-catégorie  $\mathbf{Fct}_{\infty}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  est engendrée par les foncteurs analytiques de cette forme. En effet, elle est clairement engendrée par les foncteurs

$$q_d(k[\mathcal{A}(a, -)] \otimes T) \simeq q_d(k[\mathcal{A}(a, -)]) \otimes T$$

où  $d$  parcourt  $\mathbb{N}$  et  $a$  les objets de  $\mathcal{A}$ , d'où notre assertion.

**Traitement de la  $p$ -torsion** Fixons-nous un nombre premier  $p$ .

On commence par rappeler un résultat général et classique d'algèbre homologique (dont la démonstration peut être obtenue de façon immédiate en présence d'assez de projectifs dans les catégories considérées).

**Lemme 2.1.** *Soient  $\mathcal{X}$  une catégorie de Grothendieck,  $\mathcal{Y}$  une sous-catégorie de  $\mathcal{X}$  pleine, stable par sous-objets, quotients et sommes directes arbitraires (c'est donc une catégorie de Grothendieck),  $\iota : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$  le foncteur d'inclusion et  $\pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  son adjoint à droite. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *pour tout entier  $n > 0$ , le foncteur dérivé  $\mathbf{R}^n \pi$  est nul sur  $\mathcal{Y}$ ;*
2. *le morphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{Y}}^*(A, B) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{X}}^*(A, B)$$

*est un isomorphisme pour tous objets  $A$  et  $B$  de  $\mathcal{Y}$ .*

*Démonstration.* L'adjonction se dérive en une suite spectrale de Grothendieck

$$E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}_{\mathcal{Y}}^i(Y, \mathbf{R}^j \pi(X)) \Rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{X}}^{i+j}(\iota(Y), X)$$

naturelle en les objets  $X$  de  $\mathcal{X}$  et  $Y$  de  $\mathcal{Y}$ . Par ailleurs, comme  $\mathcal{Y}$  est une sous-catégorie pleine de  $\mathcal{X}$ , l'unité  $\mathrm{Id}_{\mathcal{Y}} \rightarrow \pi \circ \iota$  de l'adjonction est un isomorphisme. Cela montre déjà que la deuxième assertion implique la première.

Pour la réciproque, on procède par récurrence sur  $n$ , de sorte qu'on peut supposer que  $\mathbf{R}^i \pi = 0$  sur  $\mathcal{Y}$  pour  $0 < i < n$ . Par hypothèse, le morphisme canonique  $E_2^{n,0} \rightarrow E_{\infty}^n$  est un isomorphisme (on suppose dans ce qui suit que  $X$  appartient à  $\mathcal{Y}$ ), de sorte que le terme  $E_2^{0,n}$  doit disparaître à l'infini. La suite spectrale étant indexée de sorte que les différentielles aient la graduation suivante :  $d_r : E_r^{i,j} \rightarrow E_r^{i+r, j+1-r}$ , aucune différentielle n'aboutit à  $E_r^{0,n}$  pour  $r \geq$

2, et la différentielle qui en part a pour but  $E_r^{r,n+1-r}$ , qui, d'après l'hypothèse de récurrence, ne peut être non nul que si  $r = n + 1$ . Par conséquent, cette différentielle est injective et procure un monomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}}(Y, \mathbf{R}^n \pi(X)) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{Y}}^{n+1}(Y, X).$$

Le lemme qui suit permet de conclure.  $\square$

**Lemme 2.2.** *Soient  $\mathcal{Y}$  une catégorie abélienne avec assez d'injectifs ou de projectifs,  $A$  et  $B$  deux objets de  $\mathcal{Y}$  et  $i > 0$  un entier. On suppose qu'il existe un monomorphisme*

$$\phi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{Y}}(-, A) \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{Y}}^i(-, B)$$

*de foncteurs  $\mathcal{Y}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$ . Alors  $A = 0$ .*

*Démonstration.* Représentons  $\phi_A(\mathrm{Id}_A) \in \mathrm{Ext}_{\mathcal{Y}}^i(A, B)$  par une suite exacte

$$0 \rightarrow B \rightarrow X_1 \rightarrow \cdots \rightarrow X_i \xrightarrow{f} A \rightarrow 0.$$

Comme l'épimorphisme canonique  $X_i \times_A X_i \rightarrow X_i$  (où le produit fibré est relatif à l'épimorphisme  $f : X_i \rightarrow A$  qu'on utilise deux fois) est *scindé*, l'image de  $\phi_A(\mathrm{Id}_A)$  dans  $\mathrm{Ext}^i(X_i, B)$  par  $f^*$  est nulle. Le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A, A) & \xhookrightarrow{\phi_A} & \mathrm{Ext}^i(A, B) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ \mathrm{Hom}(X_i, A) & \xhookrightarrow{\phi_{X_i}} & \mathrm{Ext}^i(X_i, B) \end{array}$$

et l'injectivité de  $f^*$  dans la colonne de gauche ( $f$  est un épimorphisme) permettent de conclure à  $\mathrm{Id}_A = 0$ , comme souhaité.  $\square$

Appliquant le lemme 2.1 à l'inclusion de la sous-catégorie  $\mathbf{Fct}_{\infty}(\mathcal{A}, \mathcal{E}_{\mathbb{F}_p})$  dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E}_{\mathbb{F}_p})$ , on obtient  $\mathbf{R}^n p_{\infty}(F) = 0$  pour tout entier  $n > 0$  et tout foncteur analytique  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{F}_p}$ . Cela implique que l'on a également  $\mathbf{R}^n p_{\infty}(X) = 0$  pour tout entier  $n > 0$  et tout foncteur analytique  $X : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$  qui prend ses valeurs dans la sous-catégorie  $\mathcal{E}_{\mathbb{F}_p}$  de  $\mathcal{E}$ . Cela provient de la formule (3) et de ce que, le foncteur d'inclusion  $u : \mathcal{E}_{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{E}$  étant exact et commutant aux limites, le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})^{op} \times \mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E}_{\mathbb{F}_p}) & \xrightarrow{\mathrm{Id} \times u_*} & \mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})^{op} \times \mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E}) \\ \mathrm{Ext}^{\bullet} \downarrow & & \downarrow \mathrm{Ext}^{\bullet} \\ \mathcal{E}_{\mathbb{F}_p} & \xrightarrow{u} & \mathcal{E} \end{array}$$

commute (l'étoile en indice indique la postcomposition).

Le foncteur d'inclusion  $u : \mathcal{E}_{\mathbb{F}_p} \rightarrow \mathcal{E}$  possède un adjoint à gauche  $\sigma$  et un adjoint à droite  $\tau$  qui sont donnés explicitement comme suit : pour tout objet  $E$  de  $\mathcal{E}$ ,  $\sigma(E)$  (resp.  $\tau(E)$ ) est le conoyau (resp. le noyau) de l'endomorphisme naturel de  $E$  donné par la multiplication par  $p$ . Pour tout foncteur  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ , on dispose d'une suite exacte

$$0 \rightarrow \tau_* F \rightarrow F \xrightarrow{\cdot p} F \rightarrow \sigma_* F \rightarrow 0$$

qui donne lieu à une suite spectrale d'hypercohomologie d'aboutissement nul dont la première page n'a que quatre colonnes :

$$E_1^{\bullet, i} : \mathbf{R}^i p_\infty(\tau_* F) \rightarrow \mathbf{R}^i p_\infty(F) \xrightarrow{-p} \mathbf{R}^i p_\infty(F) \rightarrow \mathbf{R}^i p_\infty(F).$$

Comme  $\tau_* F$  et  $\sigma_* F$  sont à valeurs dans  $\mathcal{E}_{\mathbb{F}_p}$ , les première et dernière colonnes de cette première page sont nulles si  $F$  est analytique et  $i$  strictement positif, ce qui implique que  $\mathbf{R}^i p_\infty(F)$  est alors uniquement  $p$ -divisible.

**Conclusion** Ce qui précède étant vrai pour tout nombre premier  $p$ , les foncteurs  $\mathbf{R}^i p_\infty(F)$  sont à valeurs dans  $\mathcal{E}_{\mathbb{Q}}$  pour  $i > 0$  et  $F$  analytique. Supposons que  $F$  soit *polynomial* de degré  $r$ . Pour tous entiers  $i > 0$  et  $d \geq r$ , le foncteur  $\mathbf{R}^i p_d(F)$  est annulé par un entier strictement positif, d'après la proposition 3.4 ci-après, ce qui permet d'en déduire la nullité de  $\mathbf{R}^i p_\infty(F) \simeq \operatorname{colim}_d \mathbf{R}^i p_d(F)$  (pour  $i > 0$ ).

Cela démontre le sens direct du théorème 1.14 (en utilisant le théorème 1.8 et la suite spectrale (5)).

**Démonstration du théorème 1.13 (à partir du théorème 1.7)** Le même raisonnement que ce qui précède permet de voir que, sous les hypothèses du théorème 1.13, le foncteur  $\mathbf{R}^i p_n(F)$  est nul pour  $F$  dans  $\mathbf{Fct}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  et  $0 < i \leq \frac{n-d+1}{p^r}$ .

On conclut à l'aide de la suite spectrale (5) (pour l'une des deux assertions, l'autre se traite de manière analogue en utilisant  $q_n$  et (6)).

**Démonstration du sens réciproque du théorème 1.14** L'hypothèse est équivalente au fait que, pour tout foncteur analytique  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$  et tout entier  $i > 0$ ,  $\mathbf{R}^i p_\infty(F)$  est nul. Comme le foncteur d'inclusion  $\mathbb{F}_p - \mathbf{Mod} \hookrightarrow \mathbf{Ab}$  commute aux limites et colimites, la postcomposition par celui-ci commute à  $\mathbf{R}^\bullet p_\infty$ . On en déduit donc que  $\mathbf{R}^i p_\infty$  est nul (pour  $i > 0$ ) sur  $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$ , de sorte que le théorème 1.8 permet de conclure. Le fait qu'on puisse obtenir, lorsque les hypothèses du théorème ne sont pas satisfaites, un contre-exemple dès le degré cohomologique 2, avec  $G$  additif, provient de ce que  $\mathbf{R}^2 p_\infty$  est alors non nul sur un foncteur additif (grâce au théorème 1.8) ; on conclut en reprenant la démonstration du lemme 2.1 (en la tronquant au degré 2).

## 2.3 Remarques formelles liées à des propriétés de finitude

Le morphisme canonique

$$\operatorname{Ext}_{\mathbf{Fct}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^i(F, G) \rightarrow \operatorname{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^i(F, G)$$

est toujours un isomorphisme pour  $i \leq 1$  et un monomorphisme pour  $i = 2$ , car  $\mathbf{Fct}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  est une sous-catégorie *épaisse* de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ . Cette propriété est évidente pour  $d$  fini (les foncteurs polynomiaux sont définis par l'annulation de certains effets croisés, or les foncteurs d'effets croisés sont exacts — ils commutent même à toutes les limites et colimites) ; pour  $d = \infty$ , elle est un peu moins claire (la saturation par colimites d'une sous-catégorie épaisse d'une catégorie de Grothendieck n'est pas toujours épaisse).

Lorsque  $\mathcal{E}$  est la catégorie des groupes abéliens (ou une catégorie de modules), la stabilité par extensions des foncteurs analytiques provient formellement de ce que  $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$  est engendrée par les foncteurs  $q_d(\mathbb{Z}[\mathcal{A}(a, -)])$ , qui sont de présentation finie dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$  (de sorte que  $\text{Ext}^1(q_d(\mathbb{Z}[\mathcal{A}(a, -)]), -)$  commute aux colimites filtrantes de monomorphismes). Cet argument montre en fait aussi le résultat lorsque  $\mathcal{E}$  est quelconque, à cause de la formule (3). En effet, le caractère épais de  $\mathbf{Fct}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  est équivalent à l'annulation du foncteur  $\mathbf{R}^1 p_d$  sur  $\mathbf{Fct}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ . Comme on connaît le résultat pour  $d$  fini et que  $\mathbf{R}^1 p_\infty \simeq \text{colim}_{d \in \mathbb{N}} \mathbf{R}^1 p_d$ , il suffit de vérifier que les  $\mathbf{R}^1 p_d$  commutent, pour  $d$  fini, aux colimites filtrantes de monomorphismes, ce qui est précisément une conséquence formelle du résultat de présentation finie précédent et de (3).

**Remarque 2.3.** *En revanche, pour  $i > 1$ , le foncteur  $\mathbf{R}^i p_d$  ne commute pas toujours aux colimites filtrantes de monomorphismes (quel que soit  $d > 0$ ). C'est une cause de complication dans les arguments de changement de base présentés précédemment.*

Penchons-nous sur le morphisme canonique

$$\text{colim}_{r \geq d} \text{Ext}_{\mathcal{F}_r(\mathcal{A}; k)}^*(F, G) \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; k)}^*(F, G),$$

où  $F$  et  $G$  sont des foncteurs de  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$  (on se limite ici à une catégorie de modules au but par simple commodité).

Pour des raisons formelles, on peut voir facilement que c'est un isomorphisme lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1.  $F$  est de type fini ;
2. la catégorie  $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; k)$  est localement noethérienne (ce qui équivaut à dire que chaque catégorie  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ , pour  $d$  fini, est localement noethérienne).

Cela provient de ce que, sous la deuxième hypothèse, on peut former une résolution injective  $I_\bullet^\infty$  de  $G$  dans  $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; k)$  en prenant la colimite sur les entiers  $r \geq d$  de résolutions injectives  $I_r^\bullet$  de  $G$  dans  $\mathcal{F}_r(\mathcal{A}; k)$  (le caractère localement noethérien de  $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; k)$  implique qu'un objet  $J$  de celle-ci est injectif si  $\text{Ext}_{\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; k)}^1(F, J) = 0$  pour tout  $F$  noethérien, mais un foncteur analytique noethérien est polynomial, et nécessairement de présentation finie dans  $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; k)$ , en utilisant encore le caractère localement noethérien de cette catégorie, ce qui permet de conclure par un argument de colimite filtrante).

Mais il existe des petites catégories additives a priori très « raisonnables »  $\mathcal{A}$  telles que  $\mathcal{F}_1(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$  (ou  $\mathcal{F}_1(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$ ) ne soit pas localement noethérienne, par exemple la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Ab}$  constituée des groupes abéliens finis : le foncteur associant à un groupe son sous-groupe de torsion  $p$ -primaire n'est pas de type fini, alors que c'est un sous-foncteur du foncteur d'inclusion, qui est de type fini.

## 2.4 Filtration polynomiale sur $\mathbb{F}_p[-]$

On se fixe ici un nombre premier  $p$ .

Pour  $d \in \mathbb{N}$ , on note  $Q_{(p)}^d$  le foncteur  $q_d \mathbb{F}_p[-] : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbb{F}_p - \mathbf{Mod}$  et  $S_{(p)}^d$  le noyau de la projection  $Q_{(p)}^d \twoheadrightarrow Q_{(p)}^{d-1}$ . On a classiquement :

1.  $S_{(p)}^*$  est un foncteur exponentiel de Hopf (i.e. on dispose d'isomorphismes naturels d'espaces vectoriels gradués  $S_{(p)}^*(U \oplus V) \simeq S_{(p)}^*(U) \otimes S_{(p)}^*(V)$  vérifiant les conditions monoïdales usuelles). Ainsi,  $S_{(p)}^*(V)$  est naturellement une algèbre graduée (c'est l'algèbre graduée associée à la filtration de l'algèbre de groupe  $\mathbb{F}_p[V]$  par les puissances de son idéal d'augmentation) ;
2. cette algèbre graduée est naturellement isomorphe au quotient de l'algèbre (graduée) symétrique sur le  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel  $\mathbb{F}_p \otimes V$  par l'idéal (homogène) engendré par les éléments  $v^{p^n}$ , où  $v \in V$  est tel que  $p^n.v = 0$ . En particulier,  $S_{(p)}^*(V)$  est naturellement isomorphe à l'algèbre symétrique sur  $\mathbb{F}_p \otimes V$  si  $V$  n'a pas de  $p$ -torsion, et  $S_{(p)}^d(\mathbb{Z}/p^r)$  est de dimension 1 pour  $d < p^r$  et nul sinon (on pourra par exemple se référer à [16], chap. VIII) ;
3. la description duale suivante (où l'exposant  $\vee$  désigne la dualité des  $\mathbb{F}_p$ -espaces vectoriels) nous sera également utile :  $Q_d(V)^\vee \hookrightarrow \mathbb{F}_p[V]^\vee \simeq Fct(V, \mathbb{F}_p)$  (espace vectoriel des fonctions ensemblistes  $V \rightarrow \mathbb{F}_p$ ) s'identifie au sous-espace  $Pol_d(V, \mathbb{F}_p)$  des fonctions polynomiales de degré au plus  $d$ .

Un fait élémentaire mais fondamental dans tout ce travail est le suivant :

1. pour  $p^i > d$ , l'inclusion  $Pol_d(V/p^i, \mathbb{F}_p) \hookrightarrow Pol_d(V, \mathbb{F}_p)$  qu'induit la projection  $V \twoheadrightarrow V/p^i$  est une égalité. Comme corollaire, sous la même hypothèse, le foncteur d'inclusion  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}/p^i; \mathbb{F}_p) \rightarrow \mathcal{F}_d(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$  est une égalité (nous l'avons utilisé pour définir la flèche de la proposition 1.10) ;
2. en particulier, si l'on note  $Pol(U, V)$  (où  $U$  et  $V$  sont deux groupes abéliens) le groupe abélien des fonctions polynomiales  $U \rightarrow V$  (i.e. la colimite sur  $d$  des  $Pol_d(U, V)$ ), le morphisme canonique

$$\operatorname{colim}_{i \in \mathbb{N}} Pol(V/p^i, \mathbb{F}_p) \rightarrow Pol(V, \mathbb{F}_p)$$

est un isomorphisme ;

3. comme l'inclusion  $Pol(U, \mathbb{F}_p) \hookrightarrow Fct(U, \mathbb{F}_p)$  est une égalité si  $U$  est un  $p$ -groupe abélien, on en déduit une inclusion naturelle

$$Pol(V, \mathbb{F}_p) \hookrightarrow \operatorname{colim}_{i \in \mathbb{N}} Fct(V/p^i, \mathbb{F}_p) \quad (8)$$

qui est un isomorphisme si  $V$  est de type fini.

## 2.5 Complexes de type Koszul

La structure exponentielle graduée sur  $S_{(p)}^*$  ( $p$  étant toujours un nombre premier fixé) permet de définir, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , un complexe  $K_*^n$  :

$$0 \rightarrow \mathbb{F}_p \otimes \Lambda^n \rightarrow S_{(p)}^1 \otimes \Lambda^{n-1} \rightarrow S_{(p)}^2 \otimes \Lambda^{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow S_{(p)}^{n-1} \otimes \Lambda^1 \rightarrow S_{(p)}^n \rightarrow 0$$

de foncteurs  $\mathbf{Ab} \rightarrow \mathbb{F}_p - \mathbf{Mod}$ . Ce complexe est un quotient du complexe de Koszul usuel, où apparaissent les puissances symétriques.

Explicitement, la différentielle  $\Lambda^i \otimes S_{(p)}^{n-i} \rightarrow \Lambda^{i-1} \otimes S_{(p)}^{n-i+1}$  est composée de la flèche  $\Lambda^i \otimes S_{(p)}^{n-i} \rightarrow \Lambda^{i-1} \otimes \Lambda^1 \otimes S_{(p)}^{n-i} = \Lambda^{i-1} \otimes S_{(p)}^1 \otimes S_{(p)}^{n-i}$  induite par le coproduit

$\Lambda^i \rightarrow \Lambda^{i-1} \otimes \Lambda^1$  de l'algèbre extérieure et de la flèche  $\Lambda^{i-1} \otimes S_{(p)}^1 \otimes S_{(p)}^{n-i} \rightarrow \Lambda^{i-1} \otimes S_{(p)}^{n-i+1}$  induite par le produit  $S_{(p)}^1 \otimes S_{(p)}^{n-i} \rightarrow S_{(p)}^{n-i+1}$  de l'algèbre  $S_{(p)}^*$ .

Notons  $H_*(n)$  l'homologie de  $K_*$ , qu'on gradue de sorte que  $S_{(p)}^{n-i} \otimes \Lambda^i$  se trouve en degré  $i$ .

**Proposition 2.4.** *Si la torsion  $p$ -primaire du groupe abélien  $V$  est bornée par  $p^r$ , alors  $H_i(n)(V) = 0$  pour  $n > p^r i$  ou pour  $0 < n < p$ .*

*Démonstration.* Les foncteurs  $\Lambda^i$  et  $S_{(p)}^i$ , donc aussi  $H_i(n)$ , commutent aux colimites filtrantes, de sorte qu'il suffit de montrer le résultat lorsque  $V$  est de type fini. De plus, le foncteur bigradué  $H_*(\bullet)$  est exponentiel (on dispose d'isomorphismes naturels  $H_*(\bullet)(U \oplus V) \simeq H_*(\bullet)(U) \otimes H_*(\bullet)(V)$  de  $\mathbb{F}_p$ -espaces vectoriels bigradués), car on dispose d'isomorphismes naturels  $K_*^\bullet(U \oplus V) \simeq K_*^\bullet(U) \otimes K_*^\bullet(V)$  compatibles aux différentielles (cela découle de la même propriété, aisée et bien connue, du complexe de Koszul usuel).

On en déduit qu'il suffit d'établir la propriété lorsque  $V$  est un groupe cyclique. Dans ce cas, on a  $\Lambda^i(V) = 0$  pour  $i > 1$ , de sorte que le complexe se réduit au morphisme canonique (produit)  $S_{(p)}^{n-1}(V) \otimes V \rightarrow S_{(p)}^n(V)$ . Celui-ci est surjectif (c'est-à-dire que  $H_0(n)(V)$  est nul) sauf pour  $n = 0$ , et injectif (c'est-à-dire que  $H_1(n)(V)$  est nul) sauf si  $S_{(p)}^n(V)$  est nul et  $S_{(p)}^{n-1}(V)$  non nul (auquel cas il est isomorphe à  $\mathbb{F}_p$ ). Cela arrive seulement si  $V$  est d'ordre fini, disons  $p^t$ , et  $n = p^t$ . Comme  $t \leq r$  par hypothèse, on a dans tous les cas  $H_i(n)(V) = 0$  pour  $n > p^r i$ , ou pour  $0 < n < p$ , comme souhaité.  $\square$

## 2.6 Un résultat d'annulation à la Pirashvili

On commence par rappeler le résultat classique suivant, établi par Pirashvili dans [17] ; son utilité est constante dans les considérations cohomologiques sur les catégories de foncteurs d'une catégorie additive vers une catégorie de modules.

**Lemme 2.5.** (Pirashvili) *Si  $F$  est un foncteur additif de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$  et  $A$  et  $B$  sont deux foncteurs réduits (c'est-à-dire nuls en 0),  $\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)}^*(F, A \otimes B)$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)}^*(A \otimes B, F)$  sont nuls. Plus généralement, si  $F$  est un objet de  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$  et  $A_0, A_1, \dots, A_d$  sont  $d+1$  foncteurs réduits,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)}^*(F, A_0 \otimes \dots \otimes A_d)$  et  $\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)}^*(A_0 \otimes \dots \otimes A_d, F)$  sont nuls.*

Ce lemme nous suffirait si nous restreignions nos énoncés au cas où l'un des deux arguments des groupes d'extensions est de degré 1. Pour traiter de foncteurs polynomiaux de degré arbitraire, nous aurons besoin de la généralisation suivante.

**Lemme 2.6.** *Soient  $d, i, j$  des entiers naturels et  $A, B$  des foncteurs réduits de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$ . On suppose que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^p(A, F)$  (resp.  $\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^q(B, F)$ ) est nul lorsque  $F$  appartient à  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$  et que  $p < i$  (resp.  $q < j$ ). Alors  $\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^n(A \otimes B, T) = 0$  pour  $T$  dans  $\mathcal{F}_{d+1}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$  et  $n < i + j$ .*

*Démonstration.* En utilisant l'adjonction entre diagonale  $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{A}$  et somme  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  et le fait que  $A$  et  $B$  sont réduits, on obtient classiquement

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^*(A \otimes B, T) \simeq \text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^*(A \boxtimes B, cr_2(T)),$$

où  $\boxtimes$  désigne le produit tensoriel extérieur et  $cr_2$  le deuxième effet croisé.



Par ailleurs, pour tout bifoncteur  $X$ , on dispose d'une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^p(A, a \mapsto \text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^q(B, X(a, -))) \Rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A} \times \mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^{p+q}(A \boxtimes B, X).$$

Pour  $X = cr_2(T)$  avec  $T$  dans  $\mathcal{F}_{d+1}(\mathcal{A})$ ,  $X(a, -)$  appartient à  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$  pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{A}$ , de même que les foncteurs  $a \mapsto \text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^q(B, X(a, -))$ . Par conséquent,  $E_2^{p,q} = 0$  si  $p < a$  (par l'hypothèse sur  $A$ ) ou  $q < b$  (par l'hypothèse sur  $B$ ), donc en particulier si  $p + q < a + b$ , d'où le lemme.  $\square$

## 2.7 Stabilisation à la Dold-Puppe généralisée

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout foncteur  $F$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ , on dispose d'un complexe de chaînes naturel  $D_*^{(n)}(F)$  de foncteurs de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ , dont on notera  $\mathcal{H}_*^{(n)}(F)$  l'homologie, de sorte que :

1. pour tout  $i$ ,  $D_i^{(n)}(F)(a)$  est facteur direct naturel de  $F(a^{\oplus j})$  pour un certain entier  $j$  ( $j = (n+1)^i$ ),  $D_0^{(n)}(F) = F$ ; en particulier,  $D_*^{(n)}$  commute aux limites, aux colimites, et à la précomposition par un foncteur additif;
2. si  $F$  est projectif, chaque foncteur  $D_i^{(n)}(F)$  est projectif;
3.  $\mathcal{H}_i^{(n)}(F)$  appartient à  $\mathbf{Fct}_n(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  pour tout  $i$  et s'identifie à  $q_n(F)$  pour  $i = 0$ ;
4. si  $F$  est polynomial de degré au plus  $n$ , on a  $D_i^{(n)}(F) = 0$  pour  $i > 0$ ;

Pour  $n = 1$ , le complexe  $D_*^{(1)}(F)$  est (un modèle de) la stabilisation à la Dold-Puppe de  $F$  (cf. [4] et [12]); en particulier, on peut choisir ce complexe de sorte d'obtenir exactement la construction cubique de Mac Lane ([15]) lorsque  $F = \mathbb{Z}[-]$ , dont l'homologie est naturellement isomorphe à l'homologie stable des espaces d'Eilenberg-Mac Lane.

Les complexes  $D_*^{(n)}$  peuvent être définis comme les objets simpliciaux associés à la comonade provenant de l'adjonction entre la diagonale itérée et les effets croisés d'ordre  $n + 1$ , allant de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  vers la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}^{n+1}, \mathcal{E})$  constituée des foncteurs multiréduits (i.e. nuls dès qu'un des  $n + 1$  arguments est nul). On renvoie le lecteur à [11] pour les détails. Une autre référence utile, donnant un point de vue légèrement différent sur ces complexes (en termes de  $\Gamma$ -modules<sup>2</sup>), est l'article [22] (§4) de Richter.

Voici maintenant la propriété clef des foncteurs  $\mathcal{H}_*^{(n)}$ .

**Proposition 2.7.** *Soient  $F$  un foncteur de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ ,  $n$  et  $i$  des entiers naturels. On a  $\mathcal{H}_j^{(n)}(F) = 0$  pour tout  $j < i$  si et seulement si  $\text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^j(F, T) = 0$  pour tout  $j < i$  et tout foncteur  $T$  de  $\mathbf{Fct}_n(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ .*

*Démonstration.* On raisonne par récurrence sur  $i$ . La propriété est immédiate pour  $i \leq 1$ , puisque  $\mathcal{H}_0^{(n)} \simeq q_n$ . On suppose donc  $i > 1$  et l'assertion établie jusqu'à  $i - 1$ .

---

2. La construction  $D_*^{(n)}$ , dont nous n'avons besoin ici que pour une catégorie source additive, s'étend sans changement aux catégories pointées avec coproduits finis. L'intervention de la catégorie  $\Gamma$  des ensembles finis pointés, qui possède une propriété universelle parmi ces catégories, n'est donc pas étonnante; la mise en évidence de ses liens avec la construction cubique de Mac Lane est due à Pirashvili [19].

On note  $\kappa$  le noyau de la différentielle  $D_1^{(n)} \rightarrow D_0^{(n)} = \text{Id}$ . Si  $q_n(F) = 0$ , on a donc une suite exacte courte

$$0 \rightarrow \kappa(F) \rightarrow D_1^{(n)}(F) \rightarrow F \rightarrow 0. \quad (9)$$

Appliquant le foncteur homologique  $\mathcal{H}_*^{(n)}$ , on obtient une suite exacte longue qui se réduit à des isomorphismes

$$\mathcal{H}_j^{(n)}(\kappa(F)) \xrightarrow{\simeq} \mathcal{H}_{j-1}^{(n)}(F)$$

car

$$\mathcal{H}_j^{(n)}(D_1^{(n)}(F)) \simeq D_1^{(n)}(\mathcal{H}_j^{(n)}(F)) = 0$$

puisque  $\mathcal{H}_j^{(n)}(F)$  est polynomial de degré au plus  $n$ .

Par ailleurs, si  $T$  appartient à  $\mathbf{Fct}_n(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ , lorsque  $q_n(F) = 0$ , la suite exacte longue associée à la suite exacte courte (9) procure des isomorphismes

$$\text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^{j-1}(\kappa(F), T) \xrightarrow{\simeq} \text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^j(F, T)$$

car on dispose d'un isomorphisme d'adjonction  $\text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^*(D_1^{(n)}(F), T) \simeq \text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^*(F, D_1^{(n)}(T))$  (le foncteur exact  $D_1^{(n)}$  est auto-adjoint car facteur direct de la précomposition par  $a \mapsto a^{\oplus(n+1)}$ , qui est auto-adjoint) et car  $D_1^{(n)}(T)$  est nul.

En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $\kappa(F)$ , on obtient la conclusion souhaitée.  $\square$

**Remarque 2.8.** Cette démonstration constitue une variante de la partie formelle des arguments de [2], § 2, qui est due à Scorichenko.

On utilisera aussi la variante duale de  $D_*^{(n)}$ , qui est un complexe de cochaînes  $D_{(n)}^*$ , dont on note  $\mathcal{H}_{(n)}^*$  la cohomologie, et qui vérifie les propriétés suivantes :

1. pour tout  $i$ ,  $D_{(n)}^i(F)(a)$  est facteur direct naturel de  $F(a^{\oplus j})$  pour un certain entier  $j$  ( $j = (n+1)^i$ ),  $D_{(n)}^0(F) = F$ ; en particulier,  $D_{(n)}^*$  commute aux limites, aux colimites, et à la précomposition par un foncteur additif;
2. si  $F$  est injectif, chaque foncteur  $D_{(n)}^i(F)$  est injectif;
3.  $\mathcal{H}_{(n)}^i(F)$  appartient à  $\mathbf{Fct}_n(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  pour tout  $i$  et s'identifie à  $p_n(F)$  pour  $i = 0$ ;
4. si  $F$  est polynomial de degré au plus  $n$ , on a  $D_{(n)}^i(F) = 0$  pour  $i > 0$ ;
5. on a  $\mathcal{H}_{(n)}^j(F) = 0$  pour  $j < i$  si et seulement si  $\text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^j(T, F) = 0$  pour tout  $j < i$  et tout foncteur  $T$  de  $\mathbf{Fct}_n(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ ;
6. on dispose d'isomorphismes de complexes  $p_d(D_{(n)}^*) \simeq D_{(n)}^* \circ p_d$ .

Le complexe de foncteurs  $D_{(n)}^*$  peut se définir en utilisant l'isomorphisme canonique  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E}) \simeq \mathbf{Fct}(\mathcal{A}^{op}, \mathcal{E}^{op})^{op}$  et en appliquant  $D_*^{(n)}$  sur  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}^{op}, \mathcal{E}^{op})$ .

Un corollaire utile des propriétés 5 et 1 est le résultat suivant.

**Proposition 2.9.** Pour tous  $n \in \mathbb{N}$  et  $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , la classe des foncteurs  $F$  de  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  tels que  $\text{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^j(T, F) = 0$  pour  $T$  dans  $\mathbf{Fct}_n(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  et  $j < i$  est stable par colimites filtrantes.

Ce résultat est remarquable dans la mesure où l'on ne peut pas toujours engendrer la catégorie  $\mathbf{Fct}_n(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  par des foncteurs ayant une résolution projective de type fini dans  $\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})$  (propriété équivalente, pour un foncteur  $T$ , à la commutation de  $\mathrm{Ext}_{\mathbf{Fct}(\mathcal{A}, \mathcal{E})}^*(T, -)$  aux colimites filtrantes) — cf. remarque 3.10.3 ci-après.

## 2.8 Rôle de la torsion $p$ -primaire bornée

Soient  $\mathfrak{A}$  une sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Ab}$  stable par quotients et  $\Phi$  un foncteur contravariant de  $\mathfrak{A}$  vers les  $\mathbb{F}_p$ -espaces vectoriels.

**Définition 2.10.** 1. *Nous dirons que  $\Phi$  est stationnaire sur un objet  $V$  de  $\mathfrak{A}$  si le morphisme canonique*

$$\mathrm{colim}_{n \in \mathbb{N}} \Phi(V/p^n) \rightarrow \Phi(V)$$

*est un isomorphisme.*

2. *Nous dirons que  $\Phi$  est stationnaire s'il l'est sur tout objet de  $\mathfrak{A}$ .*

3. *Nous dirons que  $\Phi$  est fortement stationnaire si pour toute famille  $(V_t)_{t \in \mathcal{E}}$  d'objets de  $\mathfrak{A}$ , le morphisme canonique*

$$\mathrm{colim}_{n \in \mathbb{N}} \prod_{t \in \mathcal{E}} \Phi(V_t/p^n) \rightarrow \prod_{t \in \mathcal{E}} \Phi(V_t)$$

*est un isomorphisme.*

Le foncteur  $\mathbf{Ab}^{op} \rightarrow \mathbb{F}_p - \mathbf{Mod}$  qui apparaîtra à la fin de cet article et dont la stationnarité nous préoccupera est le suivant :

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(-, \mathbb{Z}/p) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}/p^\infty) \otimes \mathbb{F}_p \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, -)^\vee,$$

où  $\mathbb{Z}/p^\infty$  désigne la colimite sur  $i \in \mathbb{N}$  des  $\mathbb{Z}/p^i$  (on rappelle que l'exposant  $\vee$  indique la dualité des  $\mathbb{F}_p$ -espaces vectoriels) et le dernier isomorphisme est induit par l'application bilinéaire de composition

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, -) \times \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(-, \mathbb{Z}/p^\infty) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, \mathbb{Z}/p^\infty) \simeq \mathbb{F}_p.$$

Pour établir la nécessité de conditions de torsion bornée dans nos énoncés, nous aurons besoin du résultat élémentaire suivant.

**Lemme 2.11.** *Soit  $V$  un groupe abélien. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *la torsion  $p$ -primaire de  $V$  est bornée ;*
2. *le foncteur  $\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(-, \mathbb{Z}/p)$  est stationnaire sur  $V$ .*

*Démonstration.* Si la torsion  $p$ -primaire de  $V$  est bornée par  $p^n$ , le morphisme canonique  $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, \mathbb{Z}/p^i) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, \mathbb{Z}/p^\infty)$  est un isomorphisme pour  $i \geq n$ . Comme

$$\mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(V/p^i, \mathbb{Z}/p) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V/p^i, \mathbb{Z}/p^i) \otimes \mathbb{F}_p \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(V, \mathbb{Z}/p^i) \otimes \mathbb{F}_p,$$

il s'ensuit que le morphisme canonique

$$\mathrm{colim}_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(V/p^i, \mathbb{Z}/p) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(V, \mathbb{Z}/p)$$

est un isomorphisme.

Pour la réciproque, on utilise l'isomorphisme de foncteurs  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(-, \mathbb{Z}/p) \simeq \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, -)^{\vee}$ . Dire que l'application naturelle

$$\text{colim}_{n \in \mathbb{N}} \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, V/p^n)^{\vee} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, V)^{\vee}$$

est surjective signifie que toute forme linéaire sur le  $\mathbb{F}_p$ -espace vectoriel  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, V)$  se factorise par l'application canonique  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, V) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, V/p^n)$  pour  $n$  assez grand. Cela implique que cette application est injective pour  $n$  assez grand (notant  $K_n$  son noyau,  $(K_n)$  est une suite décroissante de sous-espaces vectoriels de  $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, V)$ , si elle ne stationne pas en 0 on peut choisir une base de celui-ci qui contient un élément de  $K_n$  pour tout  $n$ , il suffit de choisir la forme linéaire envoyant tous les éléments de cette base sur 1 pour contredire notre hypothèse), c'est-à-dire que  $p^n \cdot V$  est sans  $p$ -torsion, ou encore que  $p^{n+1} \cdot v = 0$  implique  $p^n \cdot v = 0$  pour tout  $v \in V$ , i.e. que la torsion  $p$ -primaire de  $V$  est bornée par  $p^n$ .  $\square$

### 3 Démonstrations

#### 3.1 Le cas rationnel

On démontre ici le théorème 1.2, qu'on déduit d'un résultat plus fort également utile dans la démonstration du théorème 1.14 (la seule démonstration du théorème 1.2 demanderait moins de travail). On rappelle que les foncteurs  $\mathcal{H}_i^{(n)}$  et  $\mathcal{H}_{(n)}^i$  sont introduits au paragraphe 2.7. On commet l'abus d'appliquer ces foncteurs à des endofoncteurs de la catégorie  $\mathbf{Ab}$ , bien qu'elle ne soit pas essentiellement petite, mais cela ne porte pas à conséquence, car tous les foncteurs considérés commutent aux colimites filtrantes, de sorte qu'ils sont déterminés par leur restriction à la sous-catégorie essentiellement petite des groupes abéliens de type fini (la définition des  $\mathcal{H}_i^{(n)}$  fait de toute manière sens sans hypothèse de petitesse à la source).

**Lemme 3.1.** *Soient  $i, j$  et  $d$  des entiers positifs et  $V$  un groupe abélien libre de rang fini. Le groupe abélien  $\mathcal{H}_i^{(d)}(S^j)(V)$  est annulé par  $j!$  si  $j > d$ ; il est nul si  $i < 2(j - d)$ .*

*Démonstration.* On utilise les suites exactes de Koszul sur les groupes abéliens libres :

$$0 \rightarrow \Lambda^n \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^i \otimes S^{n-i} \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^1 \otimes S^{n-1} \rightarrow S^n \rightarrow 0$$

(pour  $n > 0$ ) et leurs duales

$$0 \rightarrow \Gamma^n \rightarrow \Lambda^1 \otimes \Gamma^{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^i \otimes \Gamma^{n-i} \rightarrow \dots \rightarrow \Lambda^n \rightarrow 0$$

pour obtenir, par récurrence sur  $d$ , l'assertion d'annulation, en utilisant le lemme de Pirashvili 2.5 (et le lemme 2.6, ou plutôt une variante dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$  qui ne pose pas de problème ici car tous les foncteurs prennent leurs valeurs dans les groupes abéliens plats; on peut aussi utiliser seulement le lemme 2.5 et des arguments directs de multicomplexes).

Pour l'autre assertion, il suffit d'utiliser l'existence de deux morphismes  $T^j \rightarrow S^j$  (la projection canonique ;  $T^j$  désigne la  $j$ -ème puissance tensorielle) et  $S^j \rightarrow T^j$  (la symétrisation) dont la composée  $S^j \rightarrow S^j$  égale la multiplication par  $j!$  et l'annulation de  $\mathcal{H}_*^{(d)}(T^j)$  pour  $j > d$  (qui découle du lemme 2.5 et de la proposition 2.7).  $\square$

**Lemme 3.2.** *Soient  $i, d$  des entiers strictement positifs et  $V$  un groupe abélien libre de rang fini. Le groupe abélien  $\mathcal{H}_i^{(d)}(\mathbb{Z}[-])(V)$  est annulé par  $[\frac{i}{2} + d]!$ .*

*Démonstration.* Le lemme 3.1 (et l'annulation de  $\mathcal{H}_i^{(d)}(S^j)$  pour  $j \leq d$ , due à ce que  $S^j$  est alors polynomial de degré au plus  $d$  et à la non-nullité de  $i$ ) montre que  $\mathcal{H}_i^{(d)}\left(\bigoplus_{j \in \mathbb{N}} S^j\right)(V)$  est annulé par  $[\frac{i}{2} + d]!$ . Il suffit donc d'établir l'existence d'un isomorphisme (non nécessairement fonctoriel en  $V$ )

$$\mathcal{H}_i^{(d)}(\mathbb{Z}[-])(V) \simeq \mathcal{H}_i^{(d)}\left(\bigoplus_{j \in \mathbb{N}} S^j\right)(V),$$

ce qui est une variante algébrique du théorème de Dold-Thom. Lorsque  $d = 1$ , c'est un cas particulier de [4], *Satz 4.16.* ; nous indiquons maintenant brièvement une démonstration auto-suffisante qui fonctionne pour toute valeur de  $d$ .

Soit  $\Gamma$  la catégorie des ensembles finis pointés et  $\bar{\mathbb{Z}}[-] : \Gamma \rightarrow \mathbf{Ab}$  l'adjoint à gauche du foncteur d'oubli (autrement dit,  $\bar{\mathbb{Z}}[E]$  est le quotient du groupe abélien libre  $\mathbb{Z}[E]$  construit sur  $E$  par le sous-groupe engendré par le point de base). Par le théorème 4.5 de [22], pour toute petite catégorie additive  $\mathcal{A}$ , tout foncteur  $F$  de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{Z})$  et tout objet  $a$  de  $\mathcal{A}$ , il existe un isomorphisme naturel

$$\mathcal{H}_i^{(d)}(F)(a) \simeq \mathrm{Tor}_i^\Gamma(t^d, F \circ \mathcal{L}_a)$$

où  $t^d$  est un certain foncteur polynomial de  $\mathcal{F}(\Gamma^{op}; \mathbb{Z})$  (explicité dans [22], mais dont la description exacte n'a pas d'importance ici) et  $\mathcal{L}_a$  désigne le foncteur  $\Gamma \rightarrow \mathcal{A}$  donné par  $E \mapsto a \otimes \bar{\mathbb{Z}}[E]$  (on utilise ici le produit tensoriel canonique entre un objet d'une catégorie additive et un groupe abélien libre de rang fini). La conclusion provient alors des observations suivantes.

1. Si  $E$  est un objet de  $\Gamma$ , notons  $\bar{\mathbb{N}}[E]$  le monoïde abélien libre construit sur le complémentaire du point de base dans  $E$ , qui s'identifie au quotient du monoïde abélien libre sur  $E$  par l'image du point de base. Alors on dispose d'une inclusion fonctorielle  $\bar{\mathbb{N}}[E] \hookrightarrow \bar{\mathbb{Z}}[E]$  qui fait du groupe abélien  $\bar{\mathbb{Z}}[E]$  la symétrisation du monoïde abélien  $\bar{\mathbb{N}}[E]$  ;
2. comme de plus le foncteur  $t^d$  est polynomial, on en déduit que l'inclusion induit un isomorphisme

$$\mathrm{Tor}_i^\Gamma(t^d, \mathbb{Z}[-] \circ (E \mapsto \bar{\mathbb{N}}[E^{\vee r}])) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Tor}_i^\Gamma(t^d, \mathbb{Z}[-] \circ \mathcal{L}_V)$$

où  $r$  désigne le rang de  $V$  (en effet, on a alors un isomorphisme naturel  $\mathcal{L}_V(E) \simeq \bar{\mathbb{Z}}[E^{\vee r}]$ , où  $\vee$  désigne le coproduit de  $\Gamma$ ). Cela peut se voir en utilisant le théorème 3.3 de [2], qui s'étend sans changement au cas où la catégorie source, additive dans le travail en question, est remplacée par une petite catégorie pointée avec produits finis (ici,  $\Gamma^{op}$ ) ;

3. on dispose d'un isomorphisme

$$\mathbb{Z}[-] \circ \bar{\mathbb{N}}[-] \simeq \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} S^j \circ \bar{\mathbb{Z}}[-]$$

de foncteurs  $\Gamma \rightarrow \mathbf{Ab}$ , obtenu explicitement à partir des applications naturelles

$$S^j(\mathbb{Z}[A]) \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{N}[A]] \quad [a_1] \dots [a_j] \mapsto \sum_{I \subset \{1, \dots, j\}} (-1)^{\text{Card } I} \left[ \sum_{i \in I} [a_i] \right]$$

(où  $A$  est un ensemble).

□

**Proposition 3.3.** *Soient  $d$  et  $i$  des entiers strictement positifs et  $V$  un groupe abélien. Le groupe abélien  $\mathcal{H}_i^{(d)}(\mathbb{Z}[-])(V)$  est annulé par l'entier*

$$\prod_{j=0}^{\min(i-1, d)} \left[ \frac{i-j}{2} + d \right] !.$$

*Démonstration.* Comme les foncteurs  $\mathcal{H}_i^{(d)}$  et  $\mathbb{Z}[-]$  commutent aux colimites filtrantes, il suffit de montrer l'assertion lorsque  $V$  est de type fini. Choisissons une suite exacte  $0 \rightarrow B \rightarrow A \rightarrow V \rightarrow 0$ , où  $A$  et  $B$  sont des groupes abéliens libres de rang fini.

Pour tout endofoncteur  $F$  des groupes abéliens, on dispose d'un complexe simplicial

$$\dots \rightarrow F(A \oplus B^{\oplus j}) \rightarrow F(A \oplus B^{\oplus (j-1)}) \rightarrow \dots \rightarrow F(A \oplus B) \rightarrow F(A) \quad (10)$$

dont l'homologie est par définition  $L_* F(V, 0)$  (dérivation de  $F$  au sens de Dold-Puppe — cf. [4], § 4).

Si l'on suppose de plus que  $F$  est exponentiel au sens où l'on dispose d'isomorphismes naturels monoïdaux  $F(R \oplus S) \simeq F(R) \otimes F(S)$  et que  $F(0) = \mathbb{Z}$ , alors  $F(B)$  est naturellement une algèbre, augmentée par le morphisme canonique  $F(B) \rightarrow F(0) = \mathbb{Z}$ , et  $F(A)$  est un  $F(B)$ -module à gauche via le morphisme  $F(B) \rightarrow F(A)$ . Dans ce cas, le complexe précédent est un complexe barre, qui calcule, si  $F$  envoie les groupes abéliens libres sur des groupes abéliens sans torsion,  $\text{Tor}_*^{F(B)}(\mathbb{Z}, F(A))$ .

Les conditions précédentes sont satisfaites dans les deux cas suivants :  $F = \mathbb{Z}[-]$  et  $F = \bigoplus_{j \in \mathbb{N}} S^j$ ; de plus, dans ces cas,  $F(B)$  est un  $F(A)$ -module plat pour toute inclusion de groupes abéliens libres  $B \hookrightarrow A$ , de sorte que l'homologie du complexe (10) est concentrée en degré nul, où elle est naturellement isomorphe à  $F(V)$ .

Reprenons les notations de la démonstration du lemme 3.2 : notre suite exacte initiale induit une suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{L}_B \rightarrow \mathcal{L}_A \rightarrow \mathcal{L}_V \rightarrow 0$  de foncteurs  $\Gamma \rightarrow \mathbf{Ab}$ , de sorte que ce qui précède fournit un complexe

$$\dots \rightarrow F \circ \mathcal{L}_{A \oplus B^{\oplus j}} \rightarrow F \circ \mathcal{L}_{A \oplus B^{\oplus (j-1)}} \rightarrow \dots \rightarrow F \circ \mathcal{L}_{A \oplus B} \rightarrow F \circ \mathcal{L}_A$$

de foncteurs  $\Gamma \rightarrow \mathbf{Ab}$  dont l'homologie est réduite à  $F \circ \mathcal{L}_V$  en degré 0 si  $F$  est l'un des deux foncteurs précédents.

Utilisant d'abord ce complexe pour  $F = \mathbb{Z}[-]$ , on obtient une suite spectrale d'hyperhomologie dont la première page est donnée par

$$E_{i,j}^1 = \mathcal{H}_j^{(d)}(\mathbb{Z}[-])(A \oplus B^{\oplus i})$$

et dont l'aboutissement est  $\mathcal{H}_*^{(d)}(\mathbb{Z}[-])(V)$ .

Pour  $j > 0$ ,  $E_{i,j}^1$ , donc  $E_{i,j}^\infty$ , est tué par  $\lfloor \frac{j}{2} + d \rfloor!$  d'après le lemme 3.2. On remarque également que  $E_{i,j}^2$  (donc  $E_{i,j}^\infty$ ) est nul pour  $i > d$ , à cause du lemme d'annulation de Pirashvili et du fait qu'on peut remplacer le complexe (10) par une variante normalisée où l'on substitue  $\mathbb{Z}[A] \otimes \mathbb{Z}[B]^{\otimes i}$  au terme  $\mathbb{Z}[A \oplus B^{\oplus i}] \simeq \mathbb{Z}[A] \otimes \mathbb{Z}[B]^{\otimes i}$ .

Traisons maintenant les termes  $E_{i,0}^1$  : munis de la différentielle  $d^1$ , ils fournissent exactement le complexe (10) pour  $F = q_d(\mathbb{Z}[-])$ . Celui-ci a une homologie nulle en degrés strictement positifs, comme on le voit par récurrence sur  $d$  en notant que le noyau de la projection canonique  $q_d(\mathbb{Z}[-]) \rightarrow q_{d-1}(\mathbb{Z}[-])$  est isomorphe, sur les groupes abéliens libres, à la  $d$ -ème puissance symétrique  $S^d$ , et en utilisant l'acyclicité déjà observée de (10) sur le foncteur algèbre symétrique. Ainsi,  $E_{i,0}^2$ , donc  $E_{i,0}^\infty$ , est nul pour  $i > 0$ .

En conclusion, pour  $i > 0$ ,  $\mathcal{H}_i^{(d)}(\mathbb{Z}[-])(V)$  possède une filtration finie dont les sous-quotients sont les  $E_{r,i-r}^\infty$ , qui sont non nuls seulement pour  $0 \leq r \leq \min(i-1, d)$ , et annulés par  $\lfloor \frac{i-r}{2} + d \rfloor!$ , d'où la proposition.  $\square$

*Démonstration du théorème 1.2.* Supposons d'abord  $d$  fini.

Il suffit d'établir le théorème lorsque  $F$  est de la forme  $q_d k[-] \circ \mathcal{A}(a, -)$  (où  $a$  est un objet de  $\text{Ob } \mathcal{A}$ ), puisque ces foncteurs forment une collection de cogénérateurs de la catégorie  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ .

Comme  $k$  est de caractéristique nulle, la proposition 3.3 montre que  $\mathcal{H}_i^{(d)}(k[-] \circ \mathcal{A}(a, -))$ , qui est isomorphe à  $F$  pour  $i = 0$ , est nul pour  $i > 0$ . Par conséquent, le complexe  $D_*^{(d)}(k[-] \circ \mathcal{A}(a, -))$  constitue une résolution projective (dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$ ) de  $F$ , de sorte que, pour tout foncteur  $G$  de  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ ,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)}^*(F, G)$  est isomorphe à l'homologie du complexe

$$\text{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)}(D_*^{(d)}(k[-] \circ \mathcal{A}(a, -)), G) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)}(k[-] \circ \mathcal{A}(a, -), D_{(d)}^*(G))$$

qui est nul en degré strictement positif. Ainsi,  $\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)}^*(F, G)$  est, comme  $\text{Ext}_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)}^*(F, G)$ , nul en degré strictement positif ( $F$  est projectif dans  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; k)$ ), ce qui donne la conclusion du théorème pour  $d$  fini.

Lorsque  $d$  est infini, on reprend le raisonnement précédent, mais en le dualisant : on peut supposer que  $F$  est polynomial et que  $G$  est un foncteur du type  $p_\infty(Fct(\mathcal{A}(-, a), k))$ , ce qui montre que l'assertion équivaut à la nullité de  $\mathcal{H}_{(d)}^i(Fct(-, k)/Pol(-, k) \circ \mathcal{A}(-, a))$  pour tous entiers  $i$  et  $d$ . Cela provient du cas précédent, en notant que

$$\mathcal{H}_{(d)}^i(Fct(-, k)/Pol(-, k) \circ \mathcal{A}(-, a)) = \text{colim}_{r \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_{(d)}^i(Fct(-, k)/Pol_r(-, k) \circ \mathcal{A}(-, a)) :$$

le cas  $d$  fini traité précédemment et la proposition 2.7 impliquent que  $\mathcal{H}_{(d)}^i(Fct(-, k)/Pol_r(-, k) \circ \mathcal{A}(-, a))$  est nul pour  $r \geq d$ . Cela achève la démonstration.  $\square$

On a en fait le résultat plus général suivant (dont on s'est servi pour déduire le théorème 1.14 des résultats relatifs à  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; k)$  pour un *corps*  $k$ ) :

**Proposition 3.4.** *Soient  $i, d$  des entiers strictement positifs. Il existe un entier  $N > 0$  tel que, pour tout un foncteur polynomial  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$  de degré au plus  $d$ , le foncteur  $\mathbf{R}^i p_d(F)$  soit annulé par  $N$ .*

*Démonstration.* Pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{A}$ , le complexe  $D_*^{(d)}(\mathbb{Z}[\mathcal{A}(a, -)])$  donne lieu à une suite spectrale d'hypercohomologie dont la deuxième page est

$$E_2^{r,s} = \text{Ext}^r(\mathcal{H}_s^{(d)}(\mathbb{Z}[-]) \circ \mathcal{A}(a, -), F)$$

et dont l'aboutissement est nul en degrés strictement positifs car

$$\text{Ext}^r(D_s^{(d)}(\mathbb{Z}[\mathcal{A}(a, -)]), F) \simeq \text{Ext}^r(\mathbb{Z}[\mathcal{A}(a, -)], D_s^{(d)}(F)) = 0$$

pour  $s > 0$  (car  $F$  appartient à  $\mathbf{Fct}_d(\mathcal{A}, \mathcal{E})$ ) ou  $r > 0$  (car  $\mathbb{Z}[\mathcal{A}(a, -)]$  est projectif).

On note que  $E_2^{i,0} = \mathbf{R}^i p_d(F)(a)$  (cf. (3)), tandis que  $E_2^{r,s}$  est annulé par  $\prod_{j=0}^{\min(s-1,d)} \left[ \frac{s-j}{2} + d \right]!$  pour  $s > 0$ , par la proposition 3.3. Cela implique la proposition.  $\square$

### 3.2 Cas de la torsion bornée

Notre principal objectif consiste à établir le théorème 1.7. La première étape, cruciale, est un résultat de stabilité.

**Lemme 3.5.** *Sous les hypothèses du théorème 1.7, le morphisme canonique  $\mathbf{R}^j p_n(F) \rightarrow \mathbf{R}^j p_m(F)$  (pour  $m > n$ ) est un isomorphisme si  $0 < j \leq \frac{n-d+1}{p^r}$ .*

*Démonstration.* Le résultat équivaut à l'annulation de  $\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^i(S_{(p)}^m \circ \mathcal{A}(a, -), F)$  pour tout objet  $a$  de  $\mathcal{A}$  et tous entiers  $i \leq \frac{n-d+1}{p^r}$  et  $m > n$  (utiliser la formule (1)). D'après la proposition 2.7, il suffit pour cela de montrer que  $\mathcal{H}_i^{(d)}(S(m)) = 0$  pour  $i \leq \frac{m-d+1}{p^r}$ , où  $S(m)$  désigne la restriction de  $S_{(p)}^m$  à la sous-catégorie pleine de  $\mathbf{Ab}$  des groupes abéliens dont la torsion  $p$ -primaire est bornée par  $p^r$ .

Cela se montre par récurrence sur  $d$  en utilisant :

1. les suites exactes

$$S(m-j-1) \otimes \Lambda^{j+1} \rightarrow S(m-j) \otimes \Lambda^j \rightarrow \cdots \rightarrow S(m-1) \otimes \Lambda^1 \rightarrow S(m) \rightarrow 0$$

où  $j = \lfloor \frac{n}{p^r} \rfloor$  (déduite de la proposition 2.4) et

$$0 \rightarrow \Gamma^m \rightarrow \Gamma^{m-1} \otimes \Lambda^1 \rightarrow \cdots \rightarrow \Gamma^1 \otimes \Lambda^{m-1} \rightarrow \Lambda^m \rightarrow 0$$

(duale de la suite exacte de Koszul classique ;  $\Gamma^j$  est ici le foncteur dual de  $\mathbb{F}_p \otimes S^j$ ) ;

2. les suites spectrales d'hypercohomologie associées ;
3. le lemme 2.6.

Pour  $d = 1$ , la première des suites exactes ci-dessus et le lemme 2.5 suffisent. La deuxième suite exacte et le lemme 2.6 permettent de montrer par récurrence sur  $d$  que  $\text{Ext}^j(\Lambda^i, F) = 0$  si  $j < i - d$  et que  $F$  est polynomial de degré au plus  $d$ . Utilisant ce résultat et, de nouveau, la première suite exacte et le lemme 2.6, on obtient la conclusion voulue par récurrence sur  $d$ .  $\square$



*Démonstration du théorème 1.7.* Les suites spectrales (5) et (6) montrent qu'il suffit d'établir que  $\mathbf{R}^j p_n(F) = 0$  et  $\mathbf{L}_j q_n(F) = 0$  pour  $0 < j \leq \frac{n-d+1}{p^r}$ , lorsque  $F$  appartient à  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$ ; on se contentera de montrer la première assertion, la seconde étant entièrement analogue.

L'annulation de  $\mathbf{R}^j p_n(F)$  pour  $0 < j \leq \frac{n-d+1}{p^r}$  qu'on cherche à montrer pour tout  $F$  dans  $\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$  équivaut à dire (d'après la proposition 2.7) que le noyau  $N_n$  de la projection  $\mathbb{F}_p[-] \rightarrow Q_n$  vérifie  $\mathcal{H}_i^{(n)}(N_n \circ \mathcal{A}(a, -)) = 0$  pour tout  $a \in \text{Ob } \mathcal{A}$  et tout entier  $i \leq \frac{n-d+1}{p^r}$ . Puisque les foncteurs  $\mathcal{H}_i^{(n)}$  sont stables par précomposition par un foncteur additif et commutent aux colimites filtrantes, il suffit de montrer que  $\mathcal{H}_i^{(n)}(A_n) = 0$ , où  $A_n$  désigne la restriction de  $N_n$  à la sous-catégorie pleine  $\mathfrak{A}$  de  $\mathbf{Ab}$  des groupes abéliens *de type fini* dont la torsion  $p$ -primaire est bornée par  $p^r$ .

En dualisant, on voit que ceci équivaut encore à l'annulation de  $\mathcal{H}_{(n)}^i$  sur la restriction à  $\mathfrak{A}^{op}$  de  $Fct(-, \mathbb{F}_p)/Pol_n(-, \mathbb{F}_p) : \mathbf{Ab}^{op} \rightarrow \mathbb{F}_p - \mathbf{Mod}$ , pour  $i \leq \frac{n-d+1}{p^r}$ . Mais la première partie de la démonstration montre que l'inclusion  $Pol_n \hookrightarrow Pol_m$  pour  $m \geq n$  induit un isomorphisme  $\mathcal{H}_{(n)}^i(Pol_n(-, \mathbb{F}_p)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{(n)}^i(Pol_m(-, \mathbb{F}_p))$  pour  $i \leq \frac{n-d+1}{p^r}$  (la source des foncteurs étant  $\mathfrak{A}^{op}$ ), de sorte qu'il suffit pour conclure d'établir que  $\mathcal{H}_{(n)}^*(R) = 0$ , où  $R$  désigne la restriction à  $\mathfrak{A}^{op}$  du foncteur  $Fct(-, \mathbb{F}_p)/Pol(-, \mathbb{F}_p) : \mathbf{Ab}^{op} \rightarrow \mathbb{F}_p - \mathbf{Mod}$ .

On utilise pour cela le monomorphisme naturel (8) qui est un isomorphisme sur les groupes abéliens de type fini. Comme  $\mathcal{H}_{(n)}^i(Fct(-, \mathbb{F}_p))$  est le dual de  $\mathcal{H}_i^{(n)}(\mathbb{F}_p[-])$ , que ce foncteur est polynomial et que  $\mathcal{H}_{(n)}^i$  commute à la précomposition par un foncteur additif, la conclusion découle donc des lemmes 3.7 et 3.8 ci-dessous.  $\square$

**Remarque 3.6.** 1. En utilisant, dans la démonstration du lemme 3.5, la suite exacte de Koszul classique et sa duale, on retrouve, dans le cas où les groupes abéliens de morphismes n'ont pas de  $p$ -torsion dans  $\mathcal{A}$ , la borne de Pirashvili (théorème 1.5).

2. Il existe plusieurs variantes de l'argument final, ne reposant pas sur les lemmes 3.7 et 3.8. L'une d'entre elles consiste à utiliser, lorsque  $A : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Ab}$  est un foncteur additif, une résolution projective de  $\mathbb{F}_p[A]$  (dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$ ) à partir d'une résolution projective de  $A$  dans la catégorie  $\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})$  et de la résolution bar. On déduit de cela aisément un isomorphisme

$$\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^*(\mathbb{F}_p[A], B) \simeq \text{Ext}_{\mathbf{Add}(\mathcal{A}, \mathbf{Ab})}^*(A, B)$$

lorsque  $B : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{F}_p - \mathbf{Mod}$  est un autre foncteur additif (on désigne, par abus, encore par  $B$  sa postcomposition par l'inclusion  $\mathbb{F}_p - \mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$ ). On notera que cet isomorphisme est relié de près au critère d'annulation cohomologique de Troesch ([24], théorème 4). À partir de là, on obtient facilement le résultat pour  $n = 1$ ; le cas général s'en déduit par un jeu sur la structure des foncteurs polynomiaux (analogue à celui utilisé pour démontrer la dernière assertion du lemme 3.7).

Dans l'énoncé suivant,  $\mathfrak{A}$  a la même signification que dans la démonstration précédente (c'est la catégorie des groupes abéliens de type fini dont la torsion  $p$ -primaire est bornée par  $p^r$ ).

- Lemme 3.7.** 1. La catégorie des foncteurs polynomiaux  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{F}_p - \mathbf{Mod}$  est localement noethérienne.
2. Un foncteur polynomial  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{F}_p - \mathbf{Mod}$  prenant des valeurs de dimension finie est noethérien.
3. Si  $F : \mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{F}_p - \mathbf{Mod}$  est un foncteur polynomial noethérien, alors le foncteur  $F^\vee : \mathfrak{A}^{op} \rightarrow \mathbb{F}_p - \mathbf{Mod}$  (on rappelle que l'exposant  $\vee$  indique la dualité des  $\mathbb{F}_p$ -espaces vectoriels) est fortement stationnaire (cf. définition 2.10).

(Dans ce paragraphe, on ne se servira que du caractère stationnaire ; le caractère *fortement* stationnaire sera utilisé dans le paragraphe suivant.)

*Démonstration.* Les deux premières assertions sont aisées (utiliser par exemple [1], § 4.3) à partir de l'observation que l'inclusion de la sous-catégorie pleine  $\mathfrak{B}$  de  $\mathfrak{A}$  des groupes abéliens dont toute la torsion est  $p$ -primaire (dont tous les objets sont sommes directes d'un nombre fini de copies d'objets en nombre fini, à savoir  $\mathbb{Z}$  et  $\mathbb{Z}/p^i$  pour  $i \leq r$ ) induit une équivalence des foncteurs polynomiaux  $\mathfrak{A} \rightarrow \mathbb{F}_p - \mathbf{Mod}$  vers les foncteurs polynomiaux  $\mathfrak{B} \rightarrow \mathbb{F}_p - \mathbf{Mod}$  (cela découle de ce qu'une fonction polynomiale d'un groupe abélien de torsion, mais sans torsion  $p$ -primaire, vers  $\mathbb{F}_p$  est constante).

On vérifie d'abord la troisième assertion lorsque  $F$  est un foncteur additif libre  $A_E := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(E, -) \otimes \mathbb{F}_p$ , puis un produit tensoriel de tels foncteurs, puis une somme directe finie de tels produits tensoriels. Si  $F$  est un foncteur polynomial de degré  $d$  noethérien, on peut trouver un morphisme d'une telle somme  $S$  vers  $F$  dont le conoyau  $Q$  est de degré  $< d$  (en effet, l'effet croisé  $cr_d(F)(E_1, \dots, E_d)$  est naturellement isomorphe aux morphismes de  $A_{E_1} \otimes \dots \otimes A_{E_d}$  vers  $F$ ). Cela permet d'obtenir, par récurrence sur  $d$ , le résultat souhaité : le fait que la conclusion soit connue pour  $F$  et  $Q$  montre d'abord que le morphisme qu'on cherche à étudier est injectif pour  $F$ , foncteur polynomial noethérien de degré au plus  $d$  quelconque, ensuite on utilise ce résultat pour le noyau  $G$  du morphisme  $S \rightarrow F$ , qui est également polynomial noethérien de degré au plus  $d$ , ce qui permet de conclure par le lemme des cinq.  $\square$

**Lemme 3.8.** Pour tous entiers naturels  $i$  et  $n$ , le foncteur  $\mathcal{H}_i^{(n)}(\mathbf{F}_p[-])$  prend des valeurs de dimension finie sur les groupes abéliens de type fini.

*Démonstration.* On voit facilement, en reprenant des raisonnements du paragraphe 3.1, que les foncteurs  $\mathcal{H}_i^{(n)}(\mathbb{Z}[-])$  prennent des valeurs de type fini sur les groupes abéliens de type fini — on traite d'abord le cas des groupes abéliens libres de rang fini, en se ramenant aux puissances symétriques (cf. le lemme 3.1 et la démonstration du lemme 3.2), puis on passe au cas général par un argument de suite spectrale comme dans la démonstration de la proposition 3.3. Le passage à  $\mathcal{H}_i^{(n)}(\mathbf{F}_p[-])$  souhaité s'en déduit par la suite exacte longue pour  $\mathcal{H}_*^{(n)}$  associée à la suite exacte courte  $0 \rightarrow \mathbb{Z}[-] \rightarrow \mathbb{Z}[-] \rightarrow \mathbf{F}_p[-] \rightarrow 0$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 1.10.* Comme corollaire du théorème 1.7, on obtient

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}/p^t; \mathbb{F}_p)}^*(F, G) \simeq \mathrm{colim}_{r \geq d} \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_r(\mathcal{A}/p^t; \mathbb{F}_p)}^*(F, G) ;$$

comme le foncteur d'inclusion  $\mathcal{F}_r(\mathcal{A}/p^t; \mathbb{F}_p) \rightarrow \mathcal{F}_r(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$  est une équivalence pour  $p^t > r$ , on en déduit la proposition.  $\square$

### 3.3 Dernières démonstrations

*Démonstration de l'implication 1.  $\Rightarrow$  2. du théorème 1.8.* Il suffit de démontrer l'assertion (ii) lorsque  $F$  est polynomial (par un argument de colimite filtrante) et  $G$  du type

$$G = p_\infty(I) \quad \text{où} \quad I = \prod_{t \in E} Fct(\mathcal{A}(-, a_t), \mathbb{F}_p)$$

où  $(a_t)_{t \in E}$  est une famille d'objets de  $\mathcal{A}$ . En effet, tout foncteur analytique possède une corésolution par des foncteurs de ce type.

Comme  $I$  est injectif dans  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$ ,  $G$  est injectif dans  $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$ , de sorte qu'il s'agit de vérifier que  $\text{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^*(F, I/G) = 0$  (pour tout  $F$  polynomial), ou encore que  $\mathcal{H}_{(n)}^*(I/G) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , c'est-à-dire que l'inclusion  $G \hookrightarrow I$  induit un isomorphisme  $\mathcal{H}_{(n)}^*(G) \rightarrow \mathcal{H}_{(n)}^*(I)$ .

Comme les foncteurs  $\mathcal{H}_{(n)}^*$  commutent aux produits, on a

$$\mathcal{H}_{(n)}^*(I) \simeq \prod_{t \in E} H_{(n)}^* \circ \mathcal{A}(-, a_t)$$

où  $H_{(n)}^* := \mathcal{H}_{(n)}^*(Fct(-, \mathbb{F}_p))$ .

Par ailleurs,

$$G = \text{colim}_{d \in \mathbb{N}} p_d \left( \prod_{t \in E} Fct(\mathcal{A}(-, a_t), \mathbb{F}_p) \right) = \text{colim}_{d \in \mathbb{N}} \left( \prod_{t \in E} Pol_d(\mathcal{A}(-, a_t), \mathbb{F}_p) \right)$$

(car les foncteurs  $p_d$  commutent aux produits pour  $d$  fini), qui s'identifie encore à

$$\text{colim}_{d \in \mathbb{N}} \left( \prod_{t \in E} Pol_d(\mathcal{A}(-, a_t), \mathbb{F}_p) \right) = \text{colim}_{(d, i) \in \mathbb{N}^2} \left( \prod_{t \in E} Pol_d(\mathcal{A}(-, a_t)/p^i, \mathbb{F}_p) \right).$$

Maintenant, les résultats du paragraphe précédent (voir la démonstration du théorème 1.7) montrent que l'inclusion induit un isomorphisme

$$\mathcal{H}_{(n)}^m(Pol_d(\mathcal{A}(-, a_t)/p^i, \mathbb{F}_p)) \rightarrow \mathcal{H}_{(n)}^m(Fct(\mathcal{A}(-, a_t)/p^i, \mathbb{F}_p))$$

si  $mp^i \leq d - n + 1$ . En utilisant la commutation de  $\mathcal{H}_{(n)}^m$  aux produits et aux colimites filtrantes, on en déduit :

$$\mathcal{H}_{(n)}^m(G) \simeq \text{colim}_{i \in \mathbb{N}} \left( \prod_{t \in E} H_{(n)}^m \circ (\mathcal{A}(-, a_t)/p^i) \right).$$

Via les isomorphismes précédents, notre morphisme  $\mathcal{H}_{(n)}^m(G) \rightarrow \mathcal{H}_{(n)}^m(I)$  s'identifie au morphisme canonique

$$\text{colim}_{i \in \mathbb{N}} \left( \prod_{t \in E} H_{(n)}^m \circ (\mathcal{A}(-, a_t)/p^i) \right) \rightarrow \prod_{t \in E} H_{(n)}^m \circ \mathcal{A}(-, a_t).$$

La conclusion provient donc des lemmes 3.7 et 3.8.  $\square$

On conserve dans ce qui suit la notation  $H_{(n)}^*$  employée dans la démonstration précédente.

**Lemme 3.9.** *Le foncteur  $H_{(1)}^1 : \mathbf{Ab}^{op} \rightarrow \mathbb{F}_p\text{-}\mathbf{Mod}$  est isomorphe à  $\text{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(-, \mathbb{Z}/p)$ .*

*Démonstration.* Cela découle, par la formule des coefficients universels, du fait que  $\mathcal{H}_0^{(1)}(\mathbb{Z}[-]) : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$  est isomorphe au foncteur identité et que  $\mathcal{H}_1^{(1)}(\mathbb{Z}[-])$  est nul. Cette dernière observation constitue un cas particulier de la proposition 3.3 (et peut aussi se déduire, beaucoup plus simplement, de ce que la sous-catégorie des foncteurs additifs est épaisse dans les endofoncteurs de  $\mathbf{Ab}$ , et que l'identité y est projective).  $\square$

*Démonstration de la proposition 1.11.* Pour l'isomorphisme du bas, on utilise les suites spectrales d'hypercohomologie convergeant vers

$$\mathbf{HExt}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^*(A, D_{(1)}^*(I))$$

où  $I$  est l'injectif  $\prod_i \overline{Fct}(\mathcal{A}(-, a_i), \mathbb{F}_p)$  (la barre signifiant qu'on ne considère que les fonctions nulles en 0) de  $\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$ .

Leur aboutissement commun est nul en degré total strictement positif, car l'une des deux suites spectrales part de

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^*(A, D_{(1)}^*(I)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}(D_*^{(1)}(A), I),$$

et  $D_*^{(1)}(A)$  est nul en degré  $*$   $> 0$  pour  $A$  additif.

Quant à l'autre, sa deuxième page est donnée par

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^p(A, \mathcal{H}_{(1)}^q(I)).$$

Comme son aboutissement est nul en degré total 1, la différentielle

$$d_2^{0,1} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}(A, \mathcal{H}_{(1)}^1(I)) \rightarrow \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^2(A, \mathcal{H}_{(1)}^0(I))$$

est un isomorphisme. Comme  $\mathcal{H}_{(1)}^0(I) \simeq p_1(I) \simeq \prod_i \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathcal{A}(-, a_i), \mathbb{F}_p) = T$  et que  $\mathcal{H}_{(1)}^1(I) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(-, \mathbb{Z}/p) \circ T$  grâce au lemme 3.9, on obtient l'isomorphisme recherché.

L'isomorphisme

$$\mathrm{colim}_{d \in \mathbb{N}^*} \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A})}^2(A, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(T, \mathbb{F}_p)) \simeq \mathrm{colim}_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A})}(A, \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1(-, \mathbb{Z}/p) \circ (T/p^i))$$

s'en déduit en utilisant la proposition 1.10.

Quant au dernier isomorphisme, on l'obtient en raisonnant comme au début de la démonstration, mais en remplaçant  $I$  par  $p_\infty(I)$  et en travaillant dans  $\mathcal{F}_\infty(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$  (avec les mêmes arguments que d'habitude pour passer de  $\mathrm{Pol}(-, \mathbb{F}_p)$  à  $\mathrm{colim}_i \mathrm{Fct}(-, \mathbb{F}_p) \circ (-/p^i)$ ).  $\square$

*Fin de la démonstration du théorème 1.8.* L'implication  $2 \Rightarrow 3$ . est évidente et l'implication  $3 \Rightarrow 1$ . découle de la proposition 1.11 et du lemme 2.11.  $\square$

**Remarque 3.10.** 1. En raisonnant de façon duale, on obtient un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^2(\mathcal{A}(a, -) \otimes \mathbb{F}_p, A) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, -) \circ \mathcal{A}(a, -), A) \quad (11)$$

pour tous  $a \in \mathrm{Ob} \mathcal{A}$  et  $A \in \mathrm{Ob} \mathcal{F}_1(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)$ , dont on déduit

$$\mathrm{colim}_{d \in \mathbb{N}^*} \mathrm{Ext}_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^2(\mathcal{A}(a, -) \otimes \mathbb{F}_p, A) \simeq \mathrm{colim}_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, -) \circ (\mathcal{A}(a, -)/p^i), A).$$

2. En utilisant ce qui précède, ou les isomorphismes de la proposition 1.11, et le lemme 2.11, on voit facilement que, si le morphisme canonique

$$\operatorname{colim}_{d \in \mathbb{N}^*} \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}_d(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^2(A, B) \rightarrow \operatorname{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^2(A, B)$$

est un isomorphisme pour tous foncteurs additifs  $A$  et  $B$ , alors il existe un entier  $r$  tel que la torsion de tous les groupes abéliens  $\mathcal{A}(a, b)$  soit bornée par  $p^r$  (prendre pour  $A$  une grosse somme directe de foncteurs additifs libres, et pour  $B$  un gros produit direct de foncteurs additifs colibres, comme dans la proposition 1.11). En revanche, cette condition est vérifiée sous la première hypothèse (plus faible) du théorème 1.8, si l'on se restreint aux foncteurs  $A$  (additifs) de type fini.

3. L'isomorphisme (11) montre également que  $\operatorname{Ext}_{\mathcal{F}(\mathcal{A}; \mathbb{F}_p)}^2(\mathcal{A}(a, -) \otimes \mathbb{F}_p, -)$ , qui s'identifie à l'évaluation en  $a$  de  $\mathbf{R}^2 p_1$  (cf. (1)), commute aux colimites filtrantes de monomorphismes (resp. aux colimites filtrantes) entre foncteurs additifs si et seulement si le foncteur additif  $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, -) \circ \mathcal{A}(a, -)$  est de type fini (resp. de présentation finie). Ce n'est pas toujours le cas (ce qui illustre la remarque 2.3), comme le montre l'exemple suivant.

Considérons la catégorie préadditive ayant une infinité dénombrable d'objets  $a, t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$  avec

$$\operatorname{End}(t_n) = \mathbb{Z}/p, \operatorname{Hom}(t_n, a) = 0, \operatorname{Hom}(a, t_n) = \mathbb{Z}/p \text{ pour tout } n,$$

$$\operatorname{End}(a) = \mathbb{Z}, \text{ et } \operatorname{Hom}(t_i, t_j) = 0 \text{ si } i \neq j$$

(il existe une et une seule composition bilinéaire). En ajoutant à cette catégorie des sommes directes formelles finies, on obtient une petite catégorie additive  $\mathcal{A}$ , dans laquelle tous les groupes abéliens de morphismes sont de type fini. Le foncteur  $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/p, -) \circ \mathcal{A}(a, -)$  est isomorphe à la somme directe sur les entiers naturels  $n$  de  $\mathcal{A}(t_n, -)$ , il n'est donc pas de type fini.

## Références

- [1] Aurélien Djament. Des propriétés de finitude des foncteurs polynomiaux. Prépublication disponible sur <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00853071>.
- [2] Aurélien Djament. Sur l'homologie des groupes unitaires à coefficients polynomiaux. *J. K-Theory*, 10(1) :87–139, 2012.
- [3] Aurélien Djament, Teimuraz Pirashvili, and Christine Vespa. Cohomologie des foncteurs polynomiaux sur les groupes libres. Prépublication disponible sur <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01059825>.
- [4] Albrecht Dold and Dieter Puppe. Homologie nicht-additiver Funktoren. Anwendungen. *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, 11 :201–312, 1961.
- [5] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. On the groups  $H(\Pi, n)$ . II. Methods of computation. *Ann. of Math. (2)*, 60 :49–139, 1954.
- [6] Vincent Franjou, Eric M. Friedlander, Alexander Scorichenko, and Andrei Suslin. General linear and functor cohomology over finite fields. *Ann. of Math. (2)*, 150(2) :663–728, 1999.

- [7] Vincent Franjou, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. Autour de la cohomologie de Mac Lane des corps finis. *Invent. Math.*, 115(3) :513–538, 1994.
- [8] Vincent Franjou and Jeffrey H. Smith. A duality for polynomial functors. *J. Pure Appl. Algebra*, 104(1) :33–39, 1995.
- [9] Manfred Hartl, Teimuraz Pirashvili, and Christine Vespa. Polynomial functors from algebras over a set-operad and non-linear Mackey functors. arXiv :1209.1607.
- [10] Hans-Werner Henn, Jean Lannes, and Lionel Schwartz. The categories of unstable modules and unstable algebras over the Steenrod algebra modulo nilpotent objects. *Amer. J. Math.*, 115(5) :1053–1106, 1993.
- [11] B. Johnson and R. McCarthy. Deriving calculus with cotriples. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 356(2) :757–803 (electronic), 2004.
- [12] Brenda Johnson and Randy McCarthy. Linearization, Dold-Puppe stabilization, and Mac Lane’s  $Q$ -construction. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350, 1998.
- [13] Nicholas J. Kuhn. Generic representations of the finite general linear groups and the Steenrod algebra. III. *K-Theory*, 9(3) :273–303, 1995.
- [14] Nicholas J. Kuhn. The generic representation theory of finite fields : a survey of basic structure. In *Infinite length modules (Bielefeld, 1998)*, Trends Math., pages 193–212. Birkhäuser, Basel, 2000.
- [15] Saunders Mac Lane. Homologie des anneaux et des modules. In *Colloque de topologie algébrique, Louvain, 1956*, pages 55–80. Georges Thone, Liège ; Masson & Cie, Paris, 1957.
- [16] Inder Bir S. Passi. *Group rings and their augmentation ideals*, volume 715 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, Berlin, 1979.
- [17] T. I. Pirashvili. Higher additivizations. *Trudy Tbiliss. Mat. Inst. Razmadze Akad. Nauk Gruz. SSR*, 91 :44–54, 1988.
- [18] Teimuraz Pirashvili. Polynomial approximation of Ext and Tor groups in functor categories. *Comm. Algebra*, 21(5) :1705–1719, 1993.
- [19] Teimuraz Pirashvili. Kan extension and stable homology of Eilenberg-Mac Lane spaces. *Topology*, 35(4) :883–886, 1996.
- [20] Teimuraz Pirashvili. Dold-Kan type theorem for  $\Gamma$ -groups. *Math. Ann.*, 318(2) :277–298, 2000.
- [21] Andrew Putman and Steven Sam. Representation stability and finite linear groups. arXiv : 1408.3694.
- [22] Birgit Richter. Taylor towers for  $\Gamma$ -modules. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 51(4) :995–1023, 2001.
- [23] Steven Sam and Andrew Snowden. Gröbner methods for representations of combinatorial categories. arXiv : 1408.3694.
- [24] Alain Troesch. Quelques calculs de cohomologie de compositions de puissances symétriques. *Comm. Algebra*, 30(7) :3351–3382, 2002.